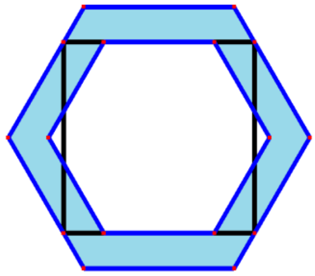
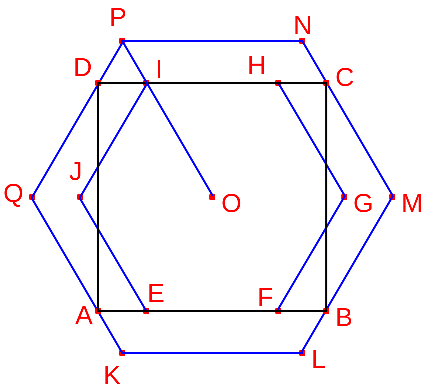
2571.- En la figura hi ha dos hexàgons regulars i un quadrat de costat 4.
Calculeu l'àrea limitada pels dos hexàgons regulars.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siguen els hexàgons regulars $EFGHIJ, KLMNPQ$.
Siguen $\overline{EF} = c, \overline{KL} = d$, costats dels hexàgons.
Els tres polígons regulars tenen el mateix centre O.
$\overline{EI} = \overline{AB} = c\sqrt{3} = 2$

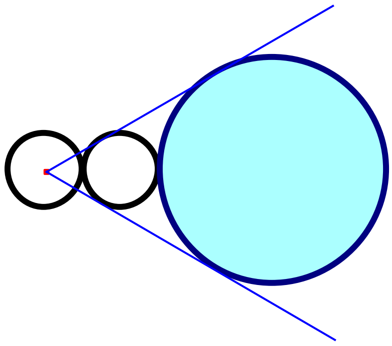


Aleshores:
$$c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
Siga $\overline{DI} = \overline{PI} = x$
$$x = \frac{2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$d = c + x = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$$
L'àrea ombrejada és igual a la diferència de les àrees dels hexàgons regulars $EFGHIJ, KLMNPQ$

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{3}(d^2 - c^2) = \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3}\right) = 3$$

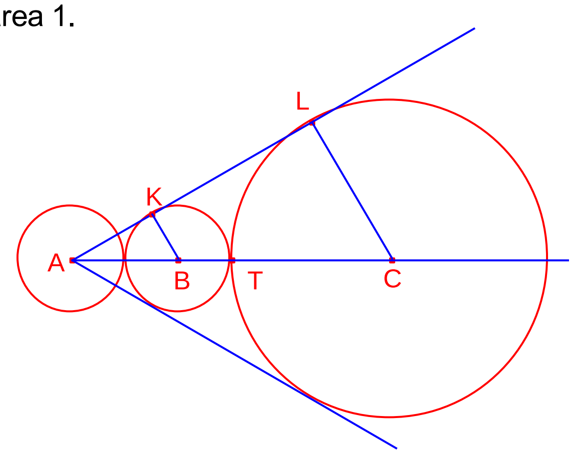
2572.- Els cercles menuts tenen àrea 1, cadascun d'ells.

Calculeu l'àrea del cercle gran.



Solució:
Siguen A, B els centres de les circumferències d'àrea 1.
Siga $r = \overline{BK} = \overline{BT}$ el radi.
$\overline{AB} = 2r$

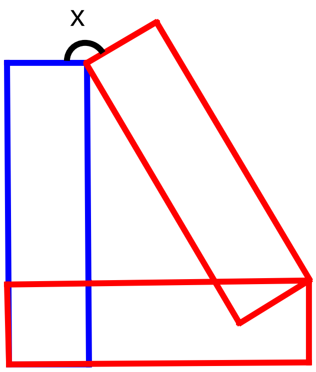
Siga C el centre de la circumferència gran.
Siga $R = \overline{CL} = \overline{CT}$ el radi.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKB}, \overset{\Delta}{ALC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{R}{r} = \frac{R+3r}{2r}$
Simplificant:
$R = 3r$

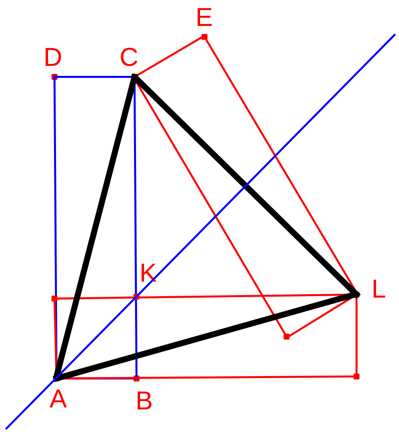
Les àrees de dos cercles són proporcionals als quadrats de la proporció dels radis:
$\frac{S_R}{S_r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 9$
Aleshores, l'àrea del cercle gran és:
$S_R = 9$

2573.- Els tres rectangles de la figura són iguals.
Calculeu l'angle x

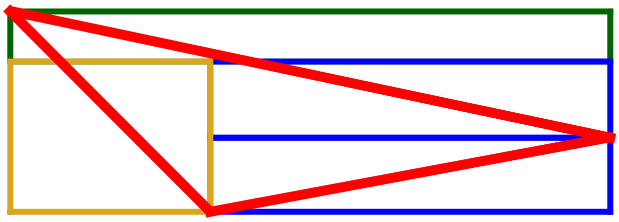


Solució:
Les diagonals dels rectangles formen un triangle equilàter.
$\angle DAC = \angle DAM - \angle DAK = 15°$

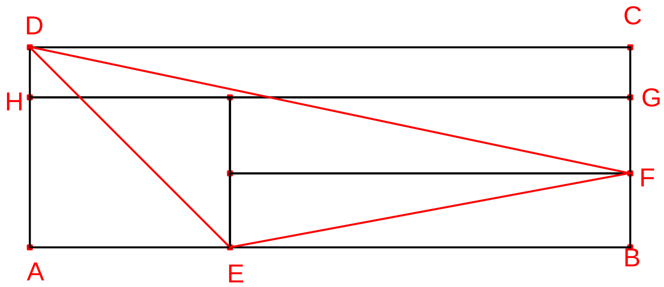
$\angle DCA = \angle LCE = 75°$
$\angle DCE = 360° - (2 \cdot 75° + 60°) = 150°$



2574.- Els quatre rectangles de la figura tenen àrea 12.
Calculeu l'àrea del triangle.



Solució:



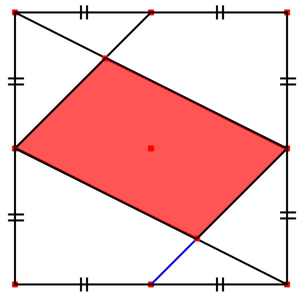
Siga $ABCD$ el rectangle exterior.
Siga $\overline{EB} = a, \overline{BF} = b$
$ab = 12$

$$\overline{AH} = \overline{BG} = 2b, \overline{AE} = \frac{1}{2}a$$

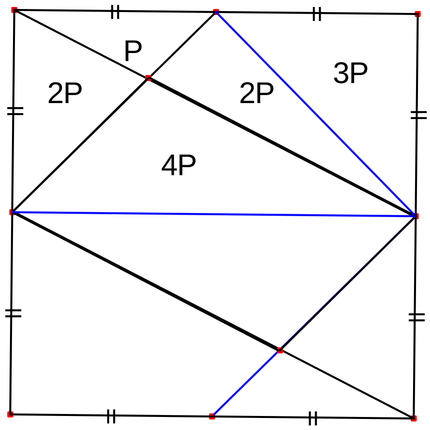
$$\overline{CD} = \frac{3}{2}a, \overline{DG} = \frac{2}{3}b$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és:
$S_{DEF} = S_{ABCD} - (S_{DAE} + S_{FCD} + S_{EBF})$
$$S_{DEF} = 4 \cdot 12 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{8}{3}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{5}{3}b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\right) = 48 - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right)ab =$$
$$= 48 - \frac{29}{12} \cdot 12 = 19$$

2575.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



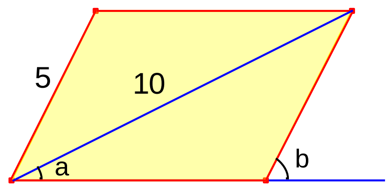
Solució:



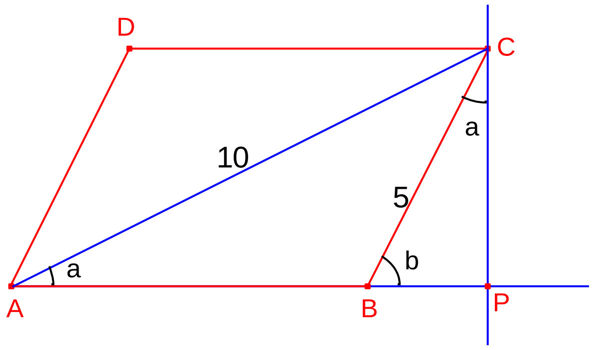
La proporció d'àrees és:

$$\frac{4P}{12P} = \frac{1}{3}$$

2576.- En la figura, $a + b = 90°$, la diagonal del paral·lelogram és 10 i un costat 5.
Calculeu l'àrea del paral·lelogram.



Solució:



Siga el paral·lelogram $ABCD$.

Siga P la projecció de C sobre la recta AB

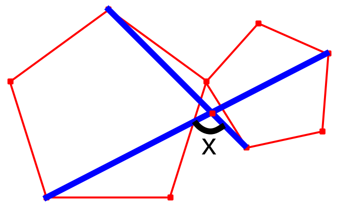
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{CPB}$ són semblants i de raó 2:1

Siga $\overline{CP} = x, \overline{AP} = 2x$

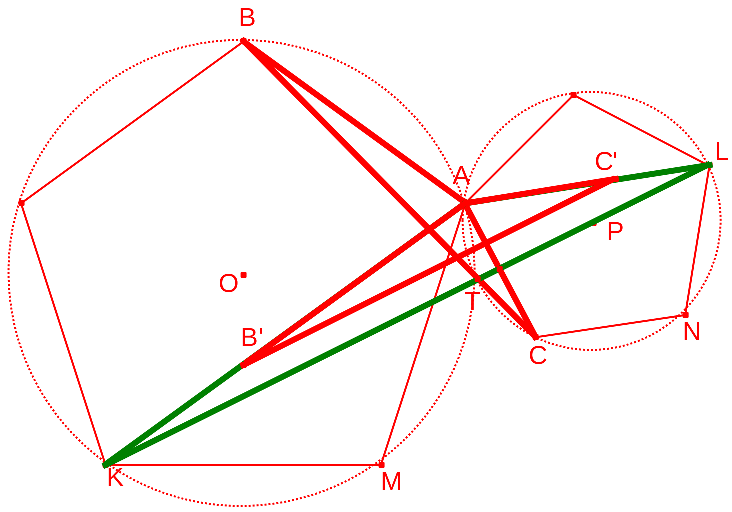
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:
$x^2 + (2x)^2 = 10^2$
$5x^2 = 100$
$x = 2\sqrt{5}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:
$\overline{BP} = \sqrt{5^2 - 20} = \sqrt{5}$
$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
L'àrea de paral·lelogram $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{CP} = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 30$

2577.- En la figura, dos pentàgons regulars tenen un vèrtex comú.
Calculeu l'angle x desconegut.



Solució:



Siga el pentàgon regular de centre O i costat $\overline{AB} = a$
Siga el pentàgon regular de centre P i costat $\overline{AC} = b$
Aleshores:
$\overline{AB}: \overline{AL} = a: b$

Siga T la intersecció de $\overline{BC}$ i $\overline{KL}$

Siga $\alpha = \angle MAC$

$\angle BAC = \angle BAM + \alpha = 108° + \alpha$

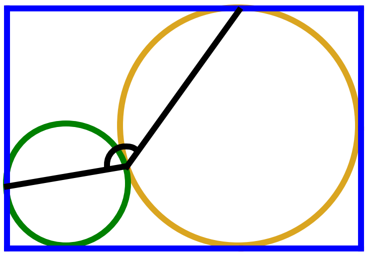
$\angle KAL = \angle KAM + \alpha + \angle CAL = 36° + \alpha + 72° = 108° + \alpha$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AKL}$ són semblants

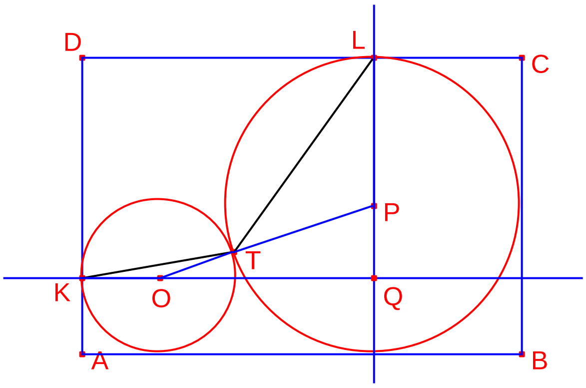
Efectuem un gir de 72º del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb centre A.

La transformació és el triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$
$\overline{B'C'}$ i $\overline{KL}$ són paral·lels.
$\angle BTK = 72°$
Aleshores,
$x = \angle KTC = 108°$

2578.- En la figura hi ha dues circumferències tangents i tangents als costats d'un rectangle. Calculeu la mesura de l'angle desconegut.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$.
Siguen O, P, els centres de les circumferències.
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga $\alpha = \angle OKT = \angle OTK, \beta = \angle PTL = \angle PLT$

La recta KO és paral·lela al costat $\overline{AB}$
La recta LP és perpendicular al costat $\overline{AB}$
Siga Q la intersecció de les rectes KO i LP

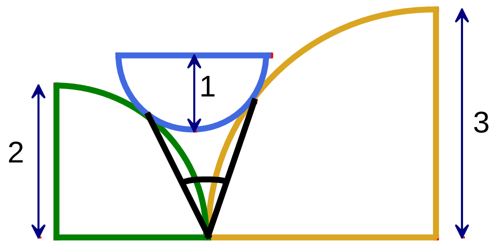
$\angle POQ = 2\alpha$
$\angle OPQ = 90° - 2\alpha$

$\angle TPL = 90° + 2\alpha$

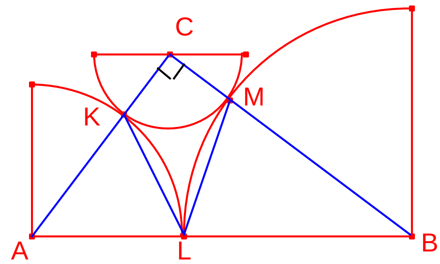
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{TPL}$ és 180º:
$180° = 90° + 2\alpha + 2\beta$
$\alpha + \beta = 45°$

$\angle KTL = 180° - (\alpha + \beta) = 135°$

2579.- En la figura hi ha dos quadrats de radis 2 i 3 i un semicercle tangent als dos quadrats de radi 1. Calculeu l'angle desconegut.



Solució:
Siguen A i B els centres dels quadrants.
Siga C el centre del semicercle.
$\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 4$



Aleshores, $\angle ACB = 90°$

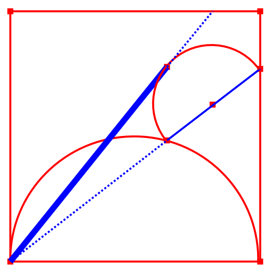
Siga $\angle ABC = \alpha$
$\angle CAB = 90° - \alpha$

El triangle $\overset{\Delta}{LBM}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle MLB = 90° - \frac{\alpha}{2}$

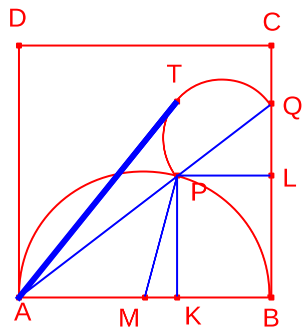
El triangle $\overset{\Delta}{ALK}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle ALK = 45° + \frac{\alpha}{2}$

$\angle KLM = 180° - (\angle MLB + \angle ALK) = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2} + 45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 45°$

2580.- El quadrat de la figura té àrea 100.
Calculeu la mesura del segment d'extrems el vèrtex del quadrat i el punt de tangència a la semicircumferència menuda.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 100, $\overline{AB} = 10$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga P la intersecció de les semicircumferències.
Siga Q la intersecció de la recta AP i el costat $\overline{BC}$



Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$
Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$

Siga $x = \overline{AK}$
$\overline{MK} = x - 5, \overline{MP} = 5$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MKP}$:
$\overline{PK} = \sqrt{10x - x^2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKP}$:
$\overline{AP} = \sqrt{10x}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKP}, \overset{\Delta}{PLQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{10 - x}{x} = \frac{\overline{PQ}}{\sqrt{10x}}$$
$$\overline{PQ} = \frac{(10 - x)\sqrt{10x}}{x}$$
Aplicant la potència del punt a respecte de la semicircumferència menuda:
$\overline{AT}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot (\overline{AP} + \overline{PQ})$

$$\overline{AT}^2 = \sqrt{10x}\left(\sqrt{10x} + \frac{(10 - x)\sqrt{10x}}{x}\right) = 100$$
Aleshores:
$\overline{AT} = 10$