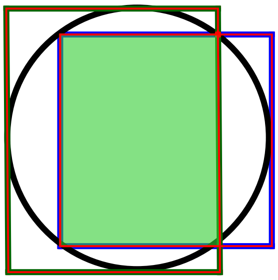
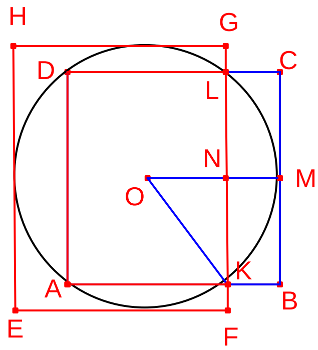
2581.- En la figura hi ha un quadrat un cercle i un rectangle.
Determineu la proporció de l'àrea ombrejada (intersecció del quadrat i el rectangle) i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $R = \overline{OK}$.
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el rectangle $EFGH$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga N el punt mig del costat $\overline{FG}$



Siga $\overline{MN} = x$

$\overline{ON} = R - x, \overline{AB} = 2R - x, \overline{NK} = \frac{2R - x}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONK}$:

$R^2 = (R - x)^2 + \left(\frac{2R - x}{2}\right)^2$

Simplificant:

$\frac{5}{4}x^2 - 3Rx + R^2 = 0$

Resolent l'equació:

$x = \frac{2}{5}R$

$\overline{AK} = 2R - 2x$

L'àrea ombrejada és:

$S_{AKLD} = (2R - x)(2R - 2x) = \frac{48}{25}R^2$

L'àrea de la figura és:

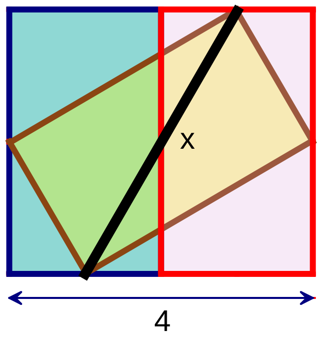
$S_{EFKBCJGH} = S_{EFGH} + S_{KBCL} = (2R - x)2R + x(2R - x) = (2R - x)(2R + x) = 4R^2 - x^2$

$S_{EFKBCJGH} = \frac{96}{25}R^2$

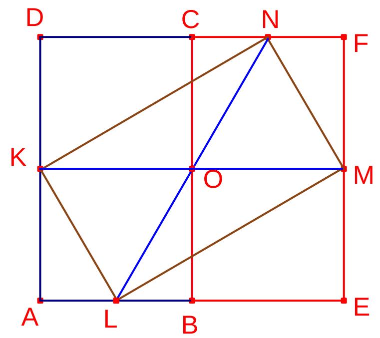
La proporció de les àrees és:

$\frac{S_{AKLD}}{S_{EFKBCJGH}} = \frac{1}{2}$

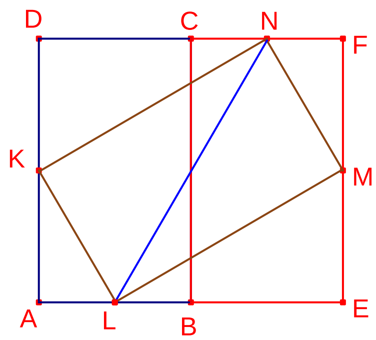
2582.- En la figura, els tres rectangles són iguals.
Calculeu la diagonal x



Solució 1:
Siguen els rectangles $ABCD, BEFC, KLMN$.
El punt mig O de la diagonal del rectangle $KLMN$ és el punt mig del costat $\overline{BC}$
Els punts K, M per simetria són punts migs dels costats $\overline{AD}, \overline{EF}$, respectivament.
Aleshores, $\overline{KM}$ és paral·lel a $\overline{AE}$
Aleshores, $\overline{LN} = 4$



Solució 2:
Siguen els rectangles $ABCD, BEFC, KLMN$.
$\overline{AB} = 2$
Siga $c = \overline{KN} = \overline{AD}$
Siga $x = \overline{FN} = \overline{AL}$



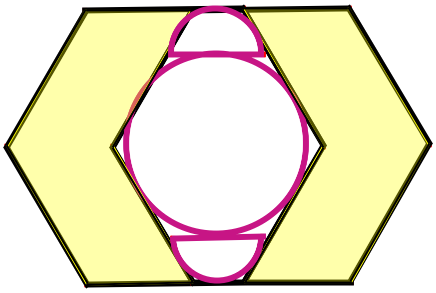
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KAL}$:
$\overline{AK} = \sqrt{4 - x^2}$

$\overline{DN} = 4 - x, \overline{DK} = c - \sqrt{4 - x^2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDN}$:
$c^2 = (4 - x)^2 + \left(c - \sqrt{4 - x^2}\right)^2$
$c\sqrt{4 - x^2} = 10 - 4x$

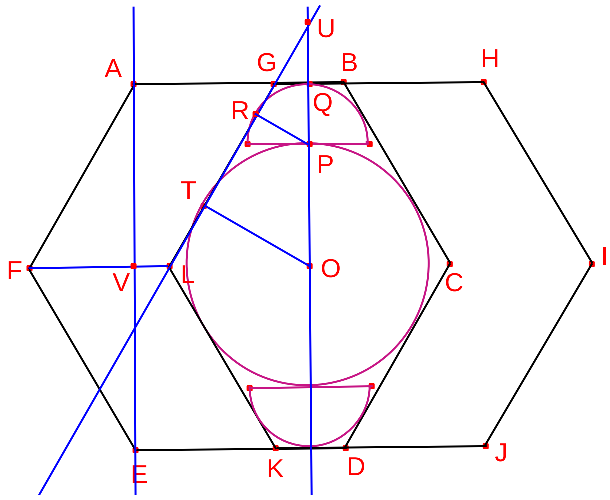
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KAL}, \overset{\Delta}{NDK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{c - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{4 - x}$$
$c\sqrt{4 - x^2} = -2x^2 + 4x + 4$
Igualant les expressions:
$10 - 4x = -2x^2 + 4x + 4$
$x^2 - 4x + 3 = 0.$
Resolent l'equació:
$x = 1$
Aleshores, $c = 2\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LKN}$:
$$\overline{LN} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

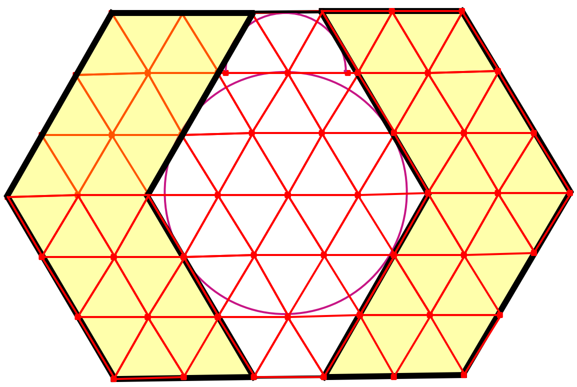
2583.- Un cercle i dos semicercles estan en la intersecció de dos hexàgons regulars iguals solapats.
Quina proporció del total té l'àrea ombrejada.



Solució:
Siguen $ABCDEF, GHIJKL$ els hexàgons regulars de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{OT} = R$ radi de la circumferència.
Siga $\overline{PR} = \overline{PQ} = r$ radi de la semicircumferència.
Les rectes OP i LG es tallen en el punt U.

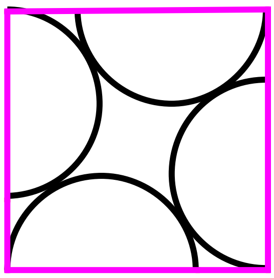


$\overline{PU} = 2r$
$\overline{OU} = 2R$
$R + 2r = 2R$
$R = 2r$
$$\overline{GB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
Siga $x = \overline{AG}$
$$x + \frac{2\sqrt{3}}{3}r = 2c$$
Siga V la projecció de A sobre FL
$\overline{AV} = R + r, \overline{AF} = c$
$$\frac{R + r}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{3r}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$c = 2\sqrt{3}c$
$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}r$$
L'àrea total és:
$$S_{AHIJEF} = S_{ABCDEF} + S_{AGLKEF} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + x\sqrt{3}c = 26\sqrt{3}r^2$$
$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{AGLKEF} = 2x\sqrt{3}c = 16\sqrt{3}r^2$$
La proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea total és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{AHIJEF}} = \frac{16\sqrt{3}r^2}{26\sqrt{3}r^2} = \frac{8}{13}$$

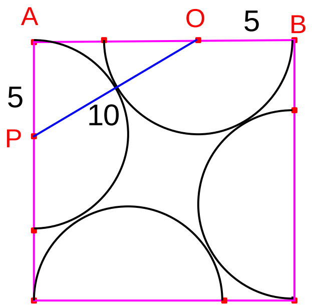


48/78=8/13

2584.- Les semicircumferències del dibuix tenen radi 5.
Determineu la mesura del costat del quadrat.



Solució:

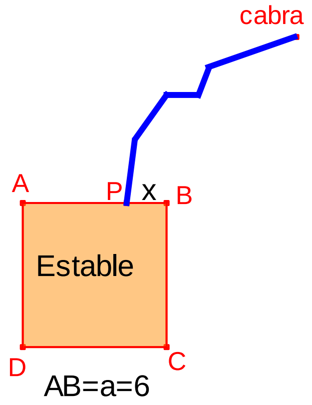


AP=5
OP=10
angle APO=60º

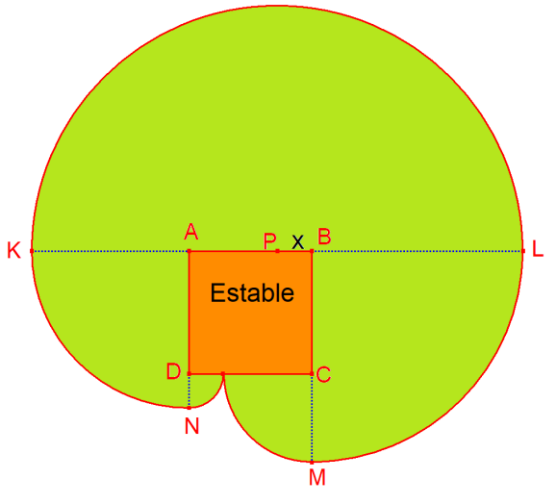
AO=5sqrt(3)
AB=5(1+sqrt(3))

2585.- En mig d'un prat hi ha un estable en forma de quadrat de 6 m de costats.
El ramader té una cabra lligada en una corda de 12 m per que no s'escape i puga menjar pel prat.
En quin punt P $\overline{BP} = x$ del costat $\overline{AB}$ ha de posar la cabra a fi que

a) L'àrea recorreguda per la cabra siga mínima.
b) L'àrea recorreguda per la cabra siga màxima..
c) Quina és l'àrea màxima i mínima.



Solució:
La superfície que recorre la cabra està formada per:
Un semicercle de diàmetre $\overline{KL}$ entre P i radi 12.
Un quadrant de centre A i radi $\overline{AK} = \overline{AN} = 6 + x$
Un quadrant de centre D i radi $\overline{DN} = x$
Un quadrant de centre B i radi $\overline{BL} = \overline{BM} = 12 - x$
Un quadrant de centre C i radi $\overline{CM} = 6 - x$



L'àrea total és:

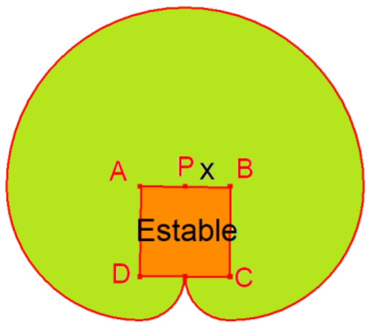
$$S = \frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 + \frac{1}{4}\pi(6+x)^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot x^2 + \frac{1}{4}\pi(12-x)^2 + \frac{1}{4}\pi(6-x)^2, \qquad x \in [0,6]$$

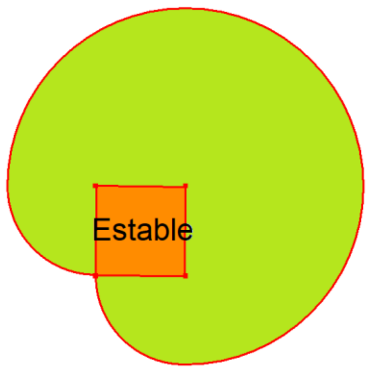
Simplificant:
$S(x) = \pi(x^2 - 6x + 126)$

La funció és una paràbola còncava.
El mínim s'assoleix en el vèrtex:

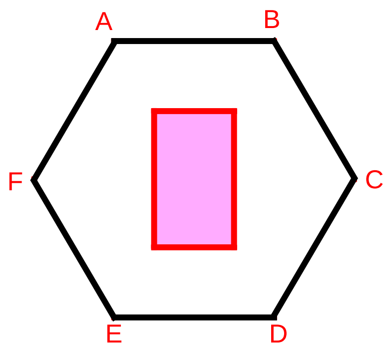
$$x = \frac{6}{2} = 3$$

L'àrea mínima és:
$S(3) = 117\tau \approx 367.57\ m^2$
El màxim s'assoleix en algun (o tots dos) extrems del domini de definició
$S(0) = 126\pi \approx 395.84 m^2$
$S(6) = 126\pi \approx 395.84 m^2$

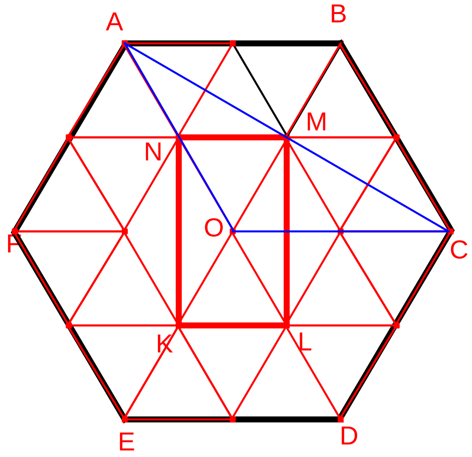




2586.- En la figura els vèrtexs del rectangle estan formats amb els punts migs de les diagonals $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{DF}, \overline{BF}$ de l'hexàgon regular. Calculeu la proporció entre les àrees dels rectangle i l'hexàgon regular



Solució:



MN=(1/2)AB
NN=(1/2)AE

4/24=1/6

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

La recta MN és paral·lela mitjana del trapezi $ABCF$.

$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2}c$

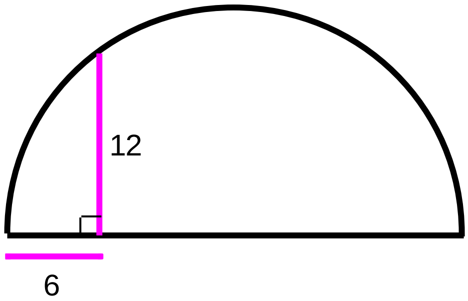
Anàlogament $\overline{KN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$
Aleshores, $KLMN$ és un rectangle.

Es pot dividir l'hexàgon regular $ABCDEF$ amb 24 triangles equilàters de costat $\frac{1}{2}c$
L'àrea del rectangle $KLMN$ és igual a 4 triangles equilàters de costat $\frac{1}{2}c$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCDEF}} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

2587.- Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:

Per ser angle inscrit i abraçar el diàmetre $\overline{AB}$:

$\angle ACB = 90°$

Aplicant el teorema de l'altura el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{CP}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{BP}$

$12^2 = 6 \cdot \overline{BP}$

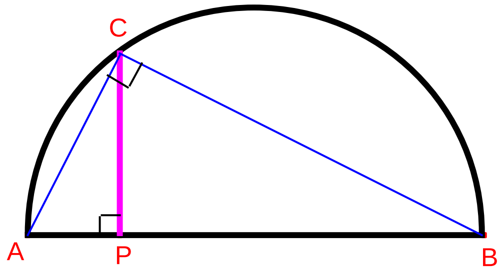
Resolent l'equació:

$\overline{BP} = 24$

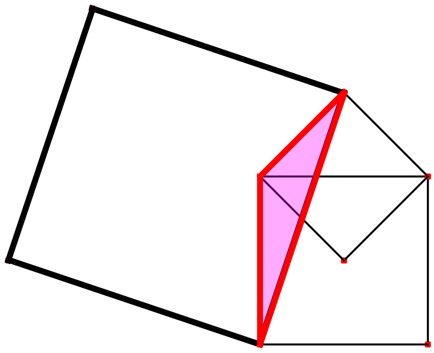
$\overline{AB} = 6 + 24 = 30$

L'àrea del semicercle és:

$S = \frac{1}{2}\pi 15^2 = \frac{225}{2}\pi \approx 353.43$

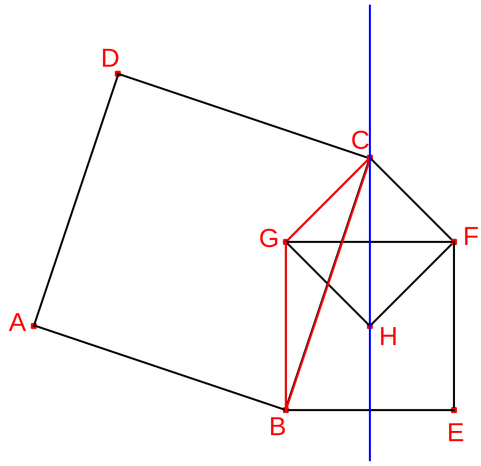


2588.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i la del quadrat gran.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = d$

Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = c$
Siga el quadrat $CGHF$ de costat $\overline{CG} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCG}$:

$$d^2 = c^2 + \frac{1}{2}c^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}c^2$$

$$d^2 = \frac{5}{2}c^2$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{5}{2}c^2$$

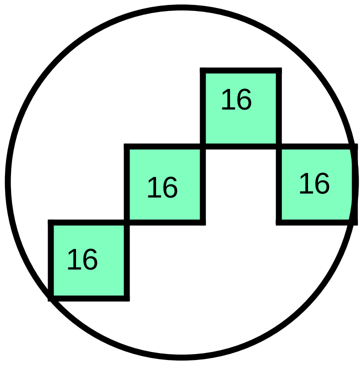
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCG}$ és:

$$S_{BCG} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c^2$$

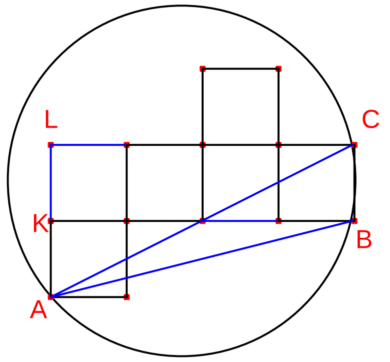
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{BCG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{\frac{2}{5}c^2} = \frac{1}{10}$$

2589.- En la figura, les àrees de cada quadrat és 16.
Determineu l'àrea del cercle.



Solució:
El costat del quadrat mesura $\overline{BC} = 4$

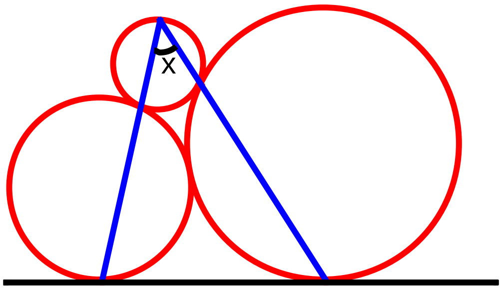


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALC}$:
$\overline{AC} = 8\sqrt{5}$

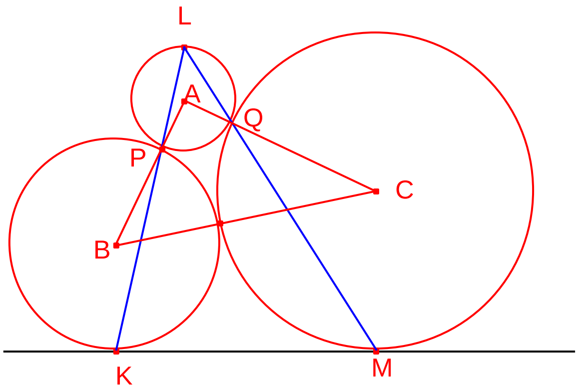
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}$:
$\overline{AB} = 4\sqrt{17}$
Siga $\alpha = \angle BAC$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$4^2 = 320 + 272 - 2 \cdot 8\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{17} \cdot \cos\alpha$
$\cos\alpha = \dfrac{9\sqrt{85}}{85}$
$\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{85}}{85}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$\frac{4}{\frac{2\sqrt{85}}{85}} = 2R$$

$R = \sqrt{85}$
L'àrea del cercle és:
$S = 85\pi$

2590.- Les circumferències de la figura tenen radis, 1, 2, 3, respectivament. Calculeu l'angle x.



Solució:



Els centres de les tres circumferències formen un triangle rectangle:
$\overline{AB} = 3, \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 5$

$\angle PAQ = 90°$
Notem que el punt L compleix que LA és paral·lela a BK i CM.
Aleshores, les rectes PK i QM es tallen en la circumferència i en el mateix punt L

$\angle PLQ$ és un angle inscrit en la circumferència de radi 1 i abraça un quadrant.
Aleshores:
$\angle PLQ = 45°$