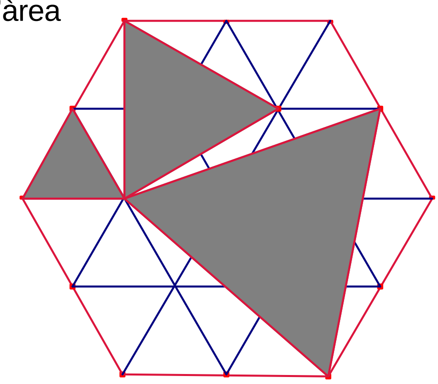
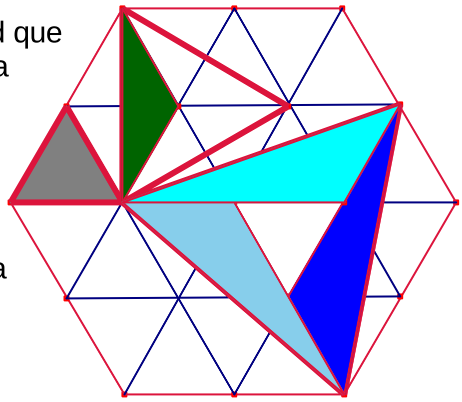
Problemes de Geometria per a l'ESO 26

251.- En la següent figura (hexàgon regular) determineu l'àrea entre la superfície ombrejada i la zona blanca.
OMA 26 intercolegial.



Solució:
La figura consta de 24 triangles equilàters iguals.
El triangle menut està format per un triangle.
El triangle mitjà està format per tres triangles igual al verd que té la mateixa àrea que un triangle. Aleshores la seua àrea és igual a tres triangles.
El triangle gran està format per tres triangles com el blau (el qual té àrea la meitat de 4 triangle) i un triangle.
Aleshores l'àrea és igual a 7 triangles.



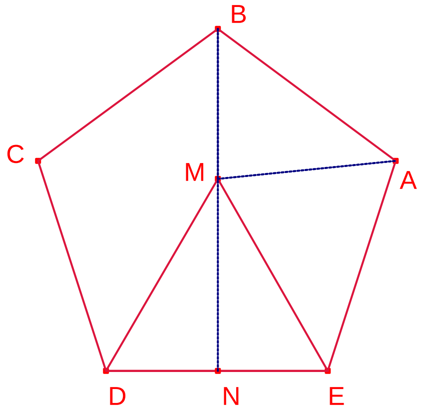
Aleshores l'àrea ombrejada està formada és igual a l'àrea de $1+3+7=11$ triangles.

La zona blanca està formada per $24-11=13$ triangles.

Aleshores la proporció entre la zona ombrejada i la blanca és $\frac{11}{13}$.

252.- En l'interior d'un pentàgon regular ABCDE es considera el punt M tal que el triangle $\overset{\Delta}{MDE}$ és equilàter. Determineu els angles del triangle $\overset{\Delta}{AMB}$.
Mathematical Reflections J170.

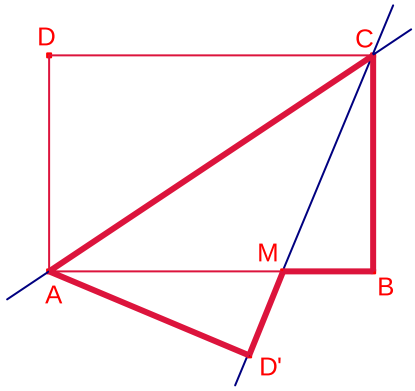
Solució
L'angle interior del pentàgon regular és 108º.
Considerem la mediatriu BN del costat $\overline{DE}$ que passa pel punt M.
$\angle NME = 30^o$.
$\angle MEA = 108^o - 60^o = 48^o$.
El triangle $\overset{\Delta}{AME}$ és isòsceles, $\overline{ME} = \overline{DE} = \overline{AE}$.
$\angle EMA = \angle EAM = \dfrac{180^o - 48^o}{2} = 66^o$.



$\angle MAB = 108^o - 66^o = 42^o$.
$\angle BMA = 180^o - (30^o + 66^o) = 84^o$.
$\angle MBA = 54^o$.

253.- Al doblar un rectangle no quadrat per la diagonal és forma un pentàgon. Demostreu que el perímetre del pentàgon és menor que el perímetre del rectangle.
Kömal B4303. Novembre 2010.

Solució 1:



Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$ tal que $a>b$.
Siga D' el simètric de D respecte de la diagonal $\overline{AC}$.
Notem que $\overline{AD'}=b$.
La recta D'C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt M.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$.
Siga $\alpha=\angle DAB$. $tg\alpha=\frac{a}{b}$.
Aleshores, $\angle BAD'=\angle MCB=2\alpha-90^o$. Aleshores, $\overline{MB}=\overline{MD'}$.

$$\frac{\overline{MB}}{b}=tg(2\alpha-90^o)=-ctg2\alpha=-\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}=-\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{2\frac{a}{b}}=\frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

Aleshores, $\overline{MB}=\frac{a^2-b^2}{2a}$.
El perímetre del pentàgon AD'MBC és: $P_{AD'MBC}=2b+\overline{AC}+2\overline{MB}$.
El perímetre del rectangle ABCD és: $P_{ABCD}=2a+2b$.
Per demostrar que el perímetre del pentàgon AD'MBC és menor que el perímetre del rectangle ABCD és suficient provar que $\overline{AC}+2\overline{MB}<2a$.

$$\overline{AC}+2\cdot\overline{MB}=\sqrt{a^2+b^2}+2\frac{a^2-b^2}{2a}=\frac{\sqrt{a^4+a^2b^2}+a^2-b^2}{a}.$$

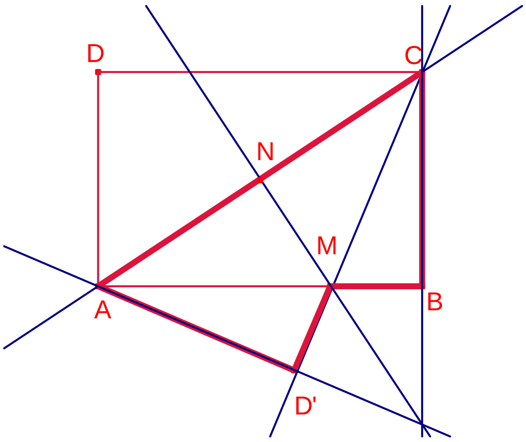
$$\frac{\sqrt{a^4+a^2b^2}+a^2-b^2}{a}<2a \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a^4+a^2b^2}+a^2-b^2<2a^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a^4+a^2b^2}<a^2+b^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^4+a^2b^2<a^4+b^4+2a^2b^2 \quad\Leftrightarrow.$$

$$a^2b^2<b^4+2a^2b^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0<b^2+a^2$$

Aleshores, $\overline{AC}+2\overline{MB}<2a$.

Solució 2:

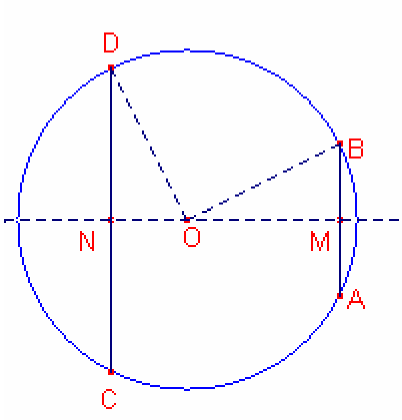


Siga N el punt mig del segment $\overline{AC}$.
Tracem la mediatriu al segment $\overline{AC}$.
La mediatriu passa per M, N.
$\overline{AN}<\overline{AM}$.
El perímetre del pentàgon AD'MBC és:
$P_{AD'MBC}=2b+\overline{AC}+2\overline{MB}$.
El perímetre del rectangle ABCD és: $P_{ABCD}=2a+2b$.
Per demostrar que el perímetre del pentàgon AD'MBC és menor que el perímetre del rectangle ABCD és suficient provar que $\overline{AC}+2\overline{MB}<2a$.

$$\overline{AC}+2\overline{MB}=2\overline{AN}+2\overline{MB}<2\overline{AM}+2\overline{MB}=2a.$$

254.- Calculeu el radi d'un cercle sabent que té una corda de 6cm que dista del centre el doble que una corda de 12.
Kömal K268.- Novembre 2010.

Solució:
Considerem la circumferència de radi R i centre O solució del problema.



Suposem que les cordes $\overline{AB}=6$, $\overline{CD}=12$ són paral·leles i considerem el diàmetre perpendicular a ambdues cordes, que talla les cordes en els seus punts migs M, N, respectivament.
Per hipòtesi $\overline{OM}=2\cdot\overline{ON}=x$.
$\overline{OB}=\overline{OD}=R$, $\overline{MB}=3, \overline{ND}=6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OMB}$, $\overset{\Delta}{OND}$:

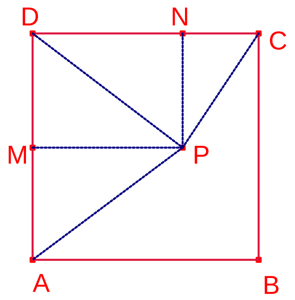
$\begin{cases} R^2=3^2+(2x)^2 \\ R^2=6^2+x^2 \end{cases}$, resolent el sistema: $\begin{cases} x=3\text{cm} \\ R=3\sqrt{5}\text{cm} \end{cases}$.

255.- El quadrat ABCD té costat 6. El punt P, interior del quadrat, és tal que $\overline{AP} = \overline{DP} = 5$.

Calculeu la longitud de $\overline{PC}$.

Crux Mathematicorum M451.

Solució:



Com que $\overline{AP} = \overline{DP} = 5$ el punt P pertany la mediatriu del costat $\overline{AD}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMP}$.

$\overline{MP} = 4$.

Siga N la projecció de P sobre el costat $\overline{DC}$.

$\overline{DN} = \overline{MP} = 4$, $\overline{PN} = \overline{MD} = 3$. Aleshores, $\overline{CN} = 2$.

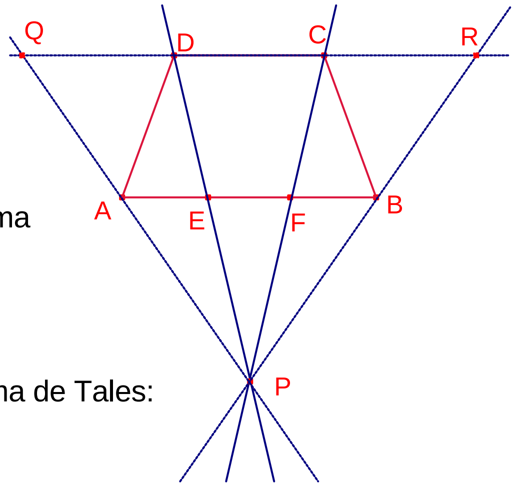
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CNP}$.

$\overline{PC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

256.- Siga ABCD un trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$, tal que $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

Els punts E i F divideixen el costat $\overline{AB}$ en tres parts iguals , E està entre A i F. Les rectes CF i DE es tallen en el punt P. Demostreu que $\angle APB = \angle DAB$.

OMA, 2010 Nacional, nivell 2.



Solució:

En aquestes condicions els trapezi ABCD és isòsceles.

Siga $\angle DAB = \alpha$.

Considerem les rectes DC i AP que es tallen en el punt Q.

Per ser la recta DC paral·lela a la recta AB, $\angle QDA = \alpha$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEP}$, $\overset{\Delta}{QDP}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EFP}$, $\overset{\Delta}{DCP}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} \qquad (2)$$

De les expressions (1) (2) com que $\overline{AE} = \overline{EF}$, aleshores, $\overline{QD} = \overline{DC} = \overline{AD}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{QDA}$ és isòsceles, per tant:

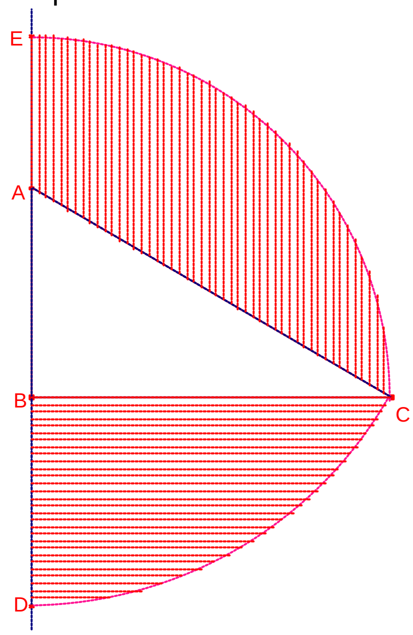
$\angle DQA = 90º - \frac{\alpha}{2}$.

Anàlogament, considerem les rectes DC i PB que es tallen en el punt R.

$\angle CRB = 90º - \frac{\alpha}{2}$.

Aleshores, $\angle APB = 180º - \angle DQA - \angle CRB = \alpha$.

257.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B=90^\circ$, $A=60^\circ$, $\overline{BC}=6$.
Amb centre A i radi $\overline{AC}$ és dibuixa l'arc que talla la semirecta AB en el punt D.
Amb centre B i radi $\overline{BC}$ és dibuixa l'arc que talla la semirecta BA en el punt E.
S'ombregen:



La regió S_1 limitada pels segments $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$ i l'arc $\overset{\frown}{CD}$, i la regió

S_2 limitada pels segments $\overline{AC}$ i $\overline{AE}$ i l'arc $\overset{\frown}{CE}$.
Calculeu l'àrea de les dues regions.
Olimpíada Ñandú 2010.

Solució:
En el triangle equilàter $C=30^\circ$.
Aleshores, $\overline{AC}=2\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AC}=4\sqrt{3}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}=6\sqrt{3}.$$

La superfície S_1 és igual a la superfície del sector de centre A i radi $\overline{AC}$ (la sisena part del cercle) menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, la seua àrea és:

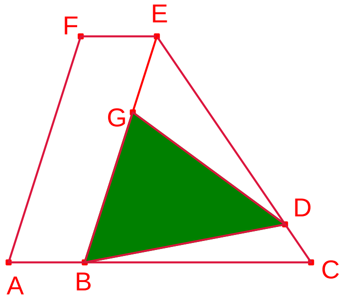
$$S_1=\frac{1}{6}\pi\left(4\sqrt{3}\right)^2-6\sqrt{3}=8\pi-6\sqrt{3}.$$

La superfície S_2 és igual a la superfície del sector de centre B i radi $\overline{BC}$ (la quarta part del cercle) menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, la seua àrea és:

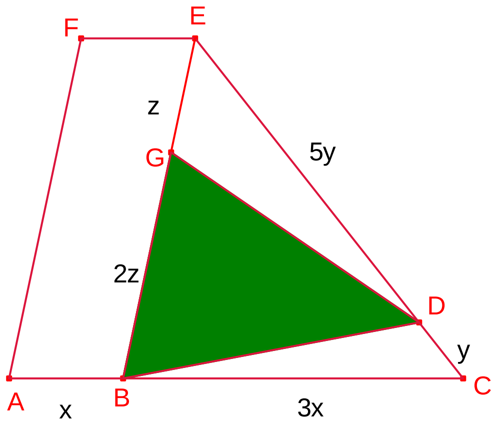
$$S_1=\frac{1}{4}\pi 6^2-6\sqrt{3}=9\pi-6\sqrt{3}.$$

258.- En la figura $\overline{AC} = 4 \cdot \overline{AB}$, $\overline{CE} = 6 \cdot \overline{CD}$, $\overline{BE} = 3 \cdot \overline{EG}$.
ABEF és una paral·lelogram de 108 cm^2 d'àrea.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDG}$.
Olimpíada Ñandú 2010.



Solució:
Si $\overline{AC} = 4 \cdot \overline{AB}$, siga $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = 3x$
Si $\overline{CE} = 6 \cdot \overline{CD}$, siga $\overline{CD} = y$, $\overline{DE} = 5y$.
Si $\overline{BE} = 3 \cdot \overline{EG}$, siga $\overline{EG} = z$, $\overline{GB} = 2z$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDG}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{EDG}$, $\overset{\Delta}{BDG}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$S_{EDG} = \frac{1}{2}S.$$

$$S_{BDE} = S_{BDG} + S_{EDG} = S + \frac{1}{2}S = \frac{3}{2}S.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{BDE}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$S_{BCD} = \frac{1}{5}S_{BDE} = \frac{3}{10}S.$$

$$S_{BCE} = S_{BDE} + S_{BCD} = \frac{3}{2}S + \frac{3}{10}S = \frac{9}{5}S.$$

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABEF} = 54.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCE}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

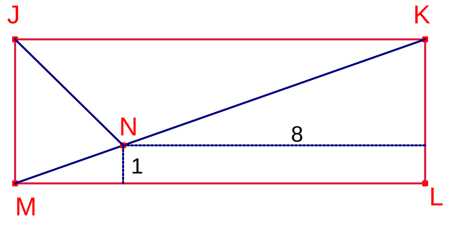
$$S_{BDE} = 3 \cdot S_{ABE}.$$

$\frac{9}{5}S = 3 \cdot 54$. Resolent l'equació:

$$S = \frac{5}{9} \cdot 3 \cdot 54 = 90cm^2.$$

259.- Al rectangle JKLM, la bisectriu de l'angle $\angle KJM$ talla la diagonal $\overline{KM}$ en el punt N. Les distàncies de N als costats $\overline{LM}$ i $\overline{KL}$ són, respectivament, 1 i b. Calculeu la longitud de $\overline{LM}$.

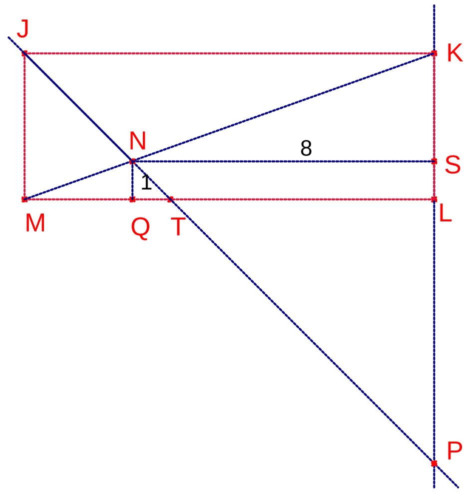
Proves Cangur 2009, Nivell 4, problema 26.



Solució:

La bisectriu JN tala la recta KL en el punt Pi al costat $\overline{LM}$ en el punt T.

Siga Q la projecció de N sobre el costat $\overline{LM}$ i S la projecció de n sobre el costat $\overline{KL}$.



Siga $x = \overline{MQ}$.

$\overline{LM} = \overline{KJ} = 8 + x$.

$\angle TKM = \angle MTK = \angle SNP = 45^o$.

Aleshores, $\overline{QT} = \overline{QN} = 1$.

Aleshores, $\overline{KM} = 1 + x$.

$\overline{SP} = \overline{NS} = 8$.

$\overline{KJ} = \overline{KP} = 8 + x$.

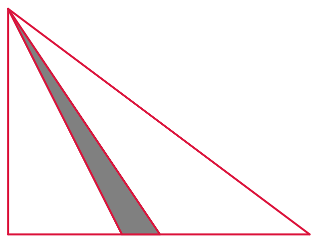
Aleshores, $\overline{KS} = \overline{KP} - \overline{SP} = x$.

Els triangles $\overset{\Delta}{MPN}$, $\overset{\Delta}{NQK}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

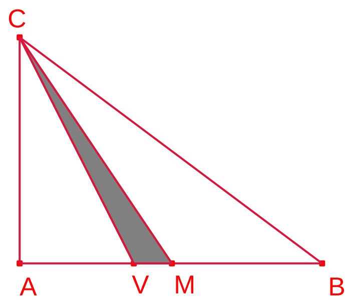
$\frac{1}{x} = \frac{x}{8}$. Resolent l'equació, $x = \sqrt{8}$.

Aleshores, $\overline{LM} = 8 + \sqrt{8}$.

260.- La llargària dels catets d'un triangle rectangle són 30cm i 40cm, respectivament. Hem dibuixat la mitjana i la bisectriu que passen pel vèrtex oposat al catet de 40cm.
Calculeu l'àrea del triangle format.
Proves Cangur 2010. Nivell 4. problema 25.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{AB} = 40$, $\overline{AC} = 30$.
Aplicant el teorema de Pitàgores, $\overline{BC} = 50$.
Siga $\overline{CM}$ la mitjana. $\overline{AM} = 20$.
Aleshores, $S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300$.
Siga $\overline{CV}$ la bisectriu . Aplicant la propietat de la bisectriu:
$\frac{\overline{AV}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BV}}{\overline{BC}}$.
$\frac{\overline{AV}}{30} = \frac{40 - \overline{AV}}{50}$. Resolent l'equació:
$\overline{AV} = 15$.
Aleshores, $S_{AVC} = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225$.
Per tant, $S_{VMC} = S_{AMC} - S_{AVC} = 300 - 225 = 75cm^2$.

Generalització:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$.
Siga Siga $\overline{CM}$ la mitjana, $\overline{CV}$ la bisectriu.

$$S_{VMC} = \frac{bc}{4} - \frac{b^2 c}{2\left(b + \sqrt{b^2 + c^2}\right)}.$$