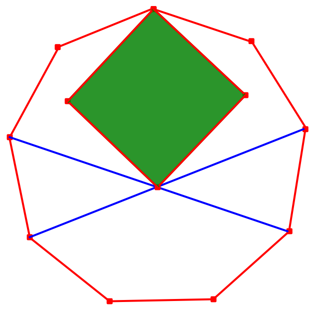
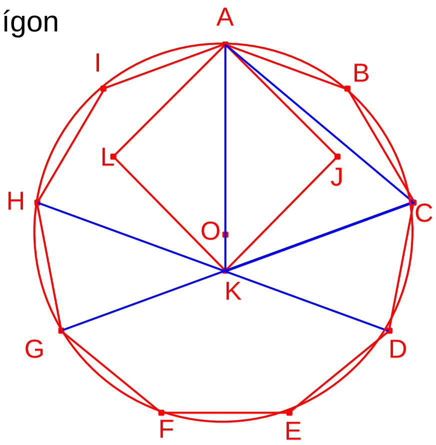


2591.- En un polígon regular de 9 costats que mesuren 2 cadascun.
Determineu l'àrea del quadrat ombrejat.

Solució:
Siga el polígon regular $ABCDEFGHI$ de costat $\overline{AB} = 2$ i centre O.



Siga $R = \overline{OA}$ el radi de la circumferència circumscrita al polígon regular.

Siga K la intersecció de les diagonals $\overline{CG}, \overline{DH}$
Siga el quadrat AJKL.

Siga $\overline{AC} = a, \overline{AK} = b$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{a}{\sin 140°} = \frac{2}{\sin 20°} = 2R$$

$$R = \frac{1}{\sin 20°}, a = \frac{2 \cdot sin 40°}{\sin 20°}$$

$\angle ACK = 60°, \angle KAC = 70° - 20° = 50°, \angle AKC = 70°$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACK}$:

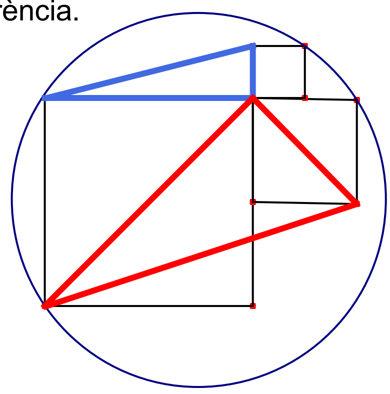
$$\frac{a}{\sin 70°} = \frac{b}{\sin 60°}$$

$$b = \frac{\sin 60°}{\sin 70°} a = \frac{\sin 60°}{\sin 70°} \frac{2 \cdot \sin 40°}{\sin 20°} = \frac{2 \cdot \sin 40° \cdot \sin 60°}{\frac{1}{2} \sin 50°} = 4 \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3}$$

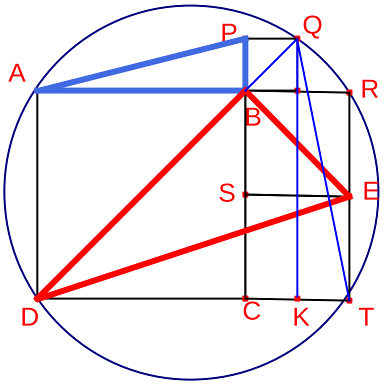
L'àrea del rectangle $AJKL$ és:

$$S_{AJKL} = \frac{1}{2} b^2 = 6$$

2592.- A la figura hi ha tres quadrats dins d’una circumferència.
El triangle blau té àrea 5.
Calculeu l’àrea del triangle roig.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga $\overline{BP} = b$
Considerem el quadrat $BRES$.
$\overline{DR}$ és diàmetre de la circumferència.
Construïm el rectangle $ARTD$.
$\overline{RT} = \overline{AD} = a$
Aleshores:
$\overline{BR} = \frac{1}{2}a$



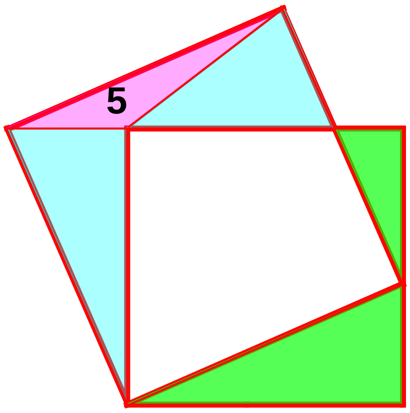
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAR}$
$\overline{DR} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$

$\angle BDC = 45°$
Aleshores, $\overline{QT}$ és igual al costat d’un quadrat inscrit en la circumferència.
$\overline{QT} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{13}}{2}a$
$\overline{KQ} = a + b, \overline{KT} = \frac{1}{2}a - b$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKT}$
$\frac{13}{8}a^2 = (a + b)^2 + \left(\frac{1}{2}a - b\right)^2$
Simplificant:
$2b^2 + ab - \frac{3}{8}a^2 = 0$
Resolent l’equació:
$b = \frac{1}{4}a$

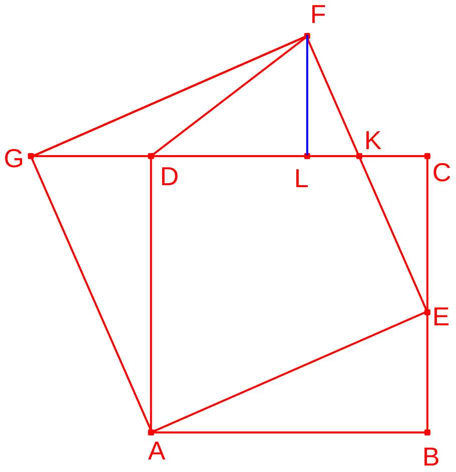
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és 5.
Aleshores:
$ab = 10$
$\frac{1}{4}a^2 = 10$

El triangle roig $\overset{\Delta}{BDE}$ és rectangle $\angle DBE = 90°$
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és:
$S_{BDE} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a^2 = 20$

2593.- En la figura hi ha dos quadrats.
El triangle ombrejat de morat és 5.
Quina és més gran l'àrea de la superfície blava o la verda.
Quina és la diferència d'àrees.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat AEFG de costat $\overline{AE} = b$
Siga $\overline{BE} = x$
Siga K la intersecció dels dos quadrats.
Siga L la projecció de F sobre $\overline{CD}$



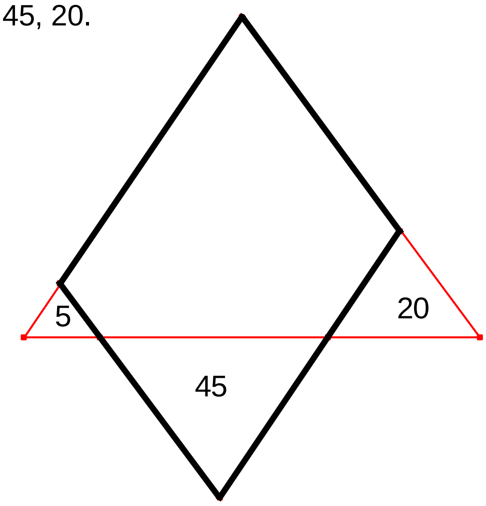
Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}E, A\overset{\Delta}{D}G, G\overset{\Delta}{L}F$, són iguals.
Aleshores:
$\overline{GD} = \overline{LF} = x$

L'àrea del triangle $G\overset{\Delta}{D}F$ és 5:
$\frac{1}{2}x^2 = 5$
Aleshores, $x^2 = 10$

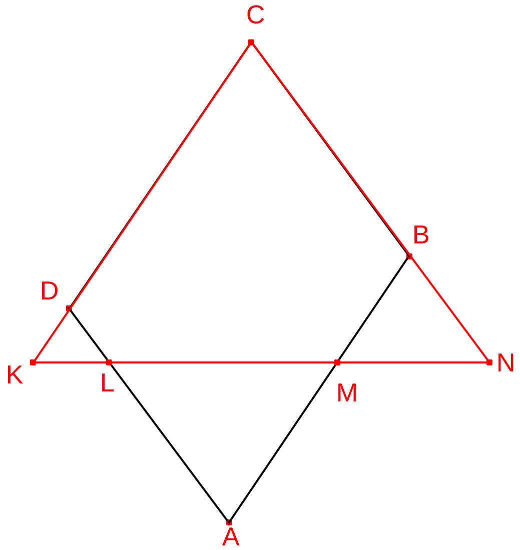
$\overline{CE} = a - x$
Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}E, E\overset{\Delta}{C}K$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CK} = \dfrac{x(a-x)}{a}$
$\overline{DK} = a - \overline{CK} = \dfrac{a^2 - ax + x^2}{a}$
Com els triangles $A\overset{\Delta}{B}E, A\overset{\Delta}{D}G$ són iguals, per comparar l'àrea blava i l'àrea verda farem la diferència de les àrees dels triangles $D\overset{\Delta}{K}F, E\overset{\Delta}{C}K$

$S_{DKF} - S_{ECK} = \frac{1}{2}\frac{a^2-ax+x^2}{a} \cdot x - \frac{1}{2}(a-x)\frac{x(a-x)}{a} = \frac{1}{2a} \cdot ax^2 = 5.$
Aleshores, l'àrea de la superfície blava es més gran que l'àrea de la superfície verda i la diferència és 5.

2594.- Els triangles de la figura tenen àrees 5, 45, 20.
Calculeu l’àrea del paral·lelogram.



Solució:



Siga el paral·lelogram $ABCD$.
Els triangles $\overset{\Delta}{KLD}, \overset{\Delta}{MLA}, \overset{\Delta}{MNB}$ són semblants.
Les àrees dels triangles semblants són proporcionals als quadrats dels costats corresponents:
Aleshores:
$\overline{KL}:\overline{ML}:\overline{MN} = 1:3:2$

Siga $\overline{KL} = k, \overline{ML} = 3k, \overline{MN} = 2k$

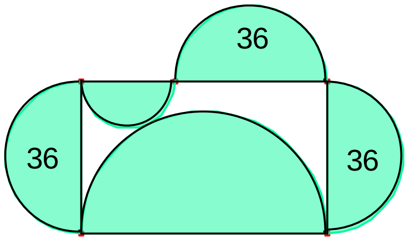
$\overset{\Delta}{KLD}, \overset{\Delta}{KNC}$ són semblants, aleshores:
$$\frac{S_{KNC}}{S_{KLD}} = \left(\frac{6k}{k}\right)^2$$

$S_{KNC} = 5 \cdot 6^2 = 180$

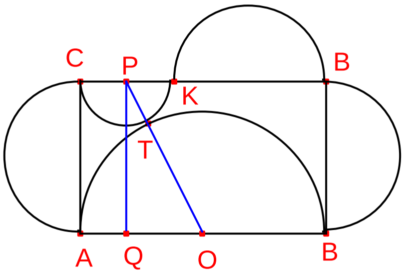
L’àrea del pentàgon $KLMCN$ és:
$S_{KLMCN} = S_{KNC} - S_{AKN} - S_{MNB} = 180 - 5 - 20 = 155$
L’àrea del paral·lelogram $ABCD$ és:

$S_{ABCD} = S_{KLMCN} + S_{MLA} = 155 + 45 = 200$

2695.- A l’exterior d’un rectangle s’han dibuixat tres cercles iguals d’àrea 36.
Calculeu l’àrea total dels altres cercles dos cercles interiors.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$.
Siga $\overline{BK} = 2r$ diàmetre de les semicircumferències exteriors.
Siga $\overline{CK} = 2s$ diàmetre de la semicircumferència interior menuda de centre P.
Siga $\overline{OA} = r + s$ radi de la semicircumferència interior gran.

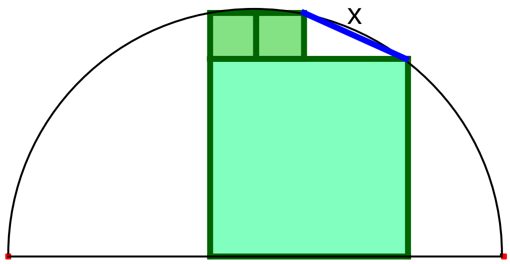
L’àrea del semicercle de diàmetre $\overline{BK} = 2r$ és 36:
$$\frac{1}{2}\pi r^2 = 36$$

Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$.
$\overline{OP} = r + 2s, \overline{OQ} = r, \overline{PQ} = 2r$

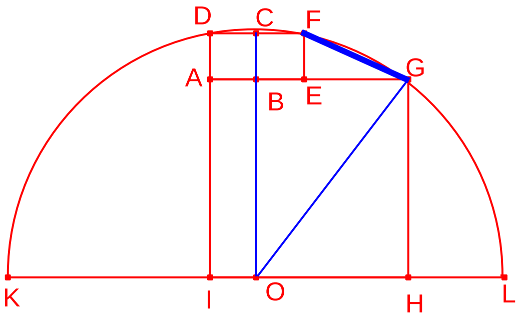
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO}$:
$(r + 2s)^2 = r^2 + 4r^2$
Simplificant:
$s^2 + rx - r^2 = 0$

La suma de les àrees dels semicercles interiors al rectangle és:
$$S = \frac{1}{2}\pi(s^2 + (r + s)^2) = \frac{1}{2}\pi(r^2 + 2s^2 + 2rs) = \frac{1}{2}\pi \cdot 3r^2 = 3 \cdot 36 = 108$$

2596.- L'àrea dels dos quadrats menuts és 6, cadascun d'ells.



Solució:



Siguen els quadrats menuts $ABCD, BEFC$ de costat $\overline{AB} = a$
La seua àrea és 6:
$a^2 = 6$

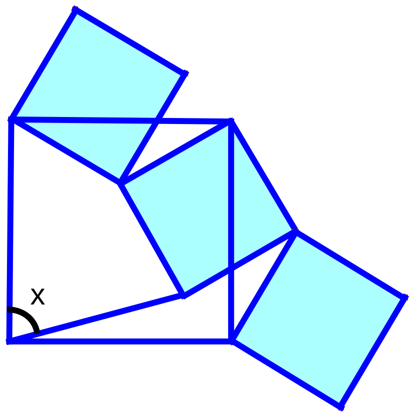
Siga el quadrat gran $AGHI$ de costat $\overline{AG} = c$
El centre de la semicircumferència és O intersecció de les rectes BC, HI.
Siga $\overline{KL} = 2r$ el diàmetre del semicercle.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DIO}, \overset{\Delta}{OHG}$:
$(a + c)^2 + a^2 = r^2$
$(c - a)^2 + c^2 = r^2$
Igualant ambdues expressions:
$(a + c)^2 + a^2 = (c - a)^2 + c^2$
Simplificant:
$c^2 - 4ac - a^2 = 0$

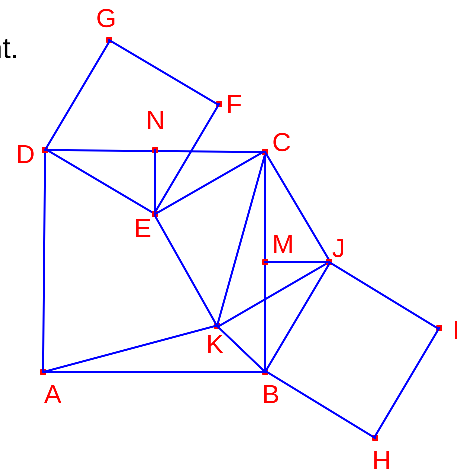
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFG}$:
$\overline{FG}^2 = a^2 + (c - 2a)^2 = c^2 - 4ac + 5a^2 = 6a^2 = 36$

Aleshores:
$x = \overline{FG} = 6$

2597.- El total de l'àrea dels tres triangles iguals ombrejats, és igual a l'àrea del quadrat gran. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el quadrat gran $ABCD$.
Siguen els quadrats iguals $DEFG, CEKJ, BHIJ$ de costat $\overline{DE} = c$
$3 \cdot S_{DEFG} = S_{ABCD}$
Aleshores, $\overline{AD} = c\sqrt{3}$



Siguen M, N els punts migs del costats $\overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament.
$\frac{\overline{DN}}{\overline{DE}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Aleshores:
$\angle CDE = \angle DCE = 30°, \angle JCB = \angle CBJ = 30°$
$\angle DEC = \angle BJC = 120°$
$\angle KCB = 45° - 30° = 15°$

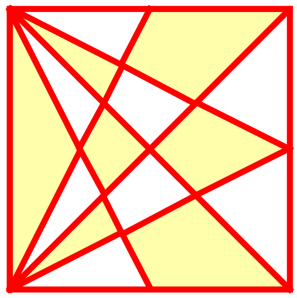
$\angle KJB = 120°, -90° = 30°$

$\angle KBJ = \angle BKJ = 75°$
$\angle KBC = 75° - 30° = 45°$

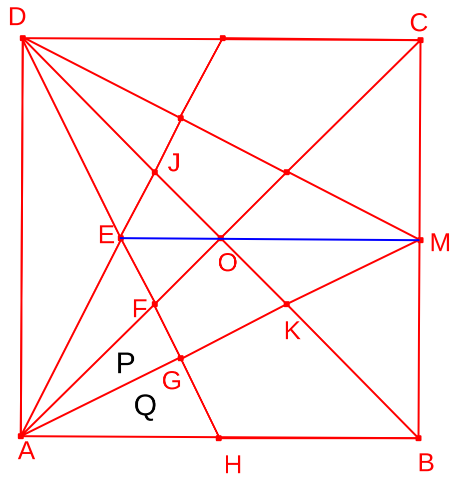
$\angle ABK = 45°$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{CBK}$ són iguals (CAC)
Aleshores,
$\angle KCB = \angle KAB = 15°$

$x = \angle DAK = 90° - 15° = 75°$

2598.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 1.



$S_{ADE}=\frac{1}{8}, S_{AEH}=\frac{1}{8} S_{CDO}=\frac{1}{4}, S_{OMB}=\frac{1}{8}$

Siguen $P=S_{AFG}, Q=S_{AGH}$

$S_{AEF}=\frac{1}{8}-(P+Q)$

$\overline{EO}=\frac{1}{4}\overline{AB}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AHF}, \overset{\Delta}{OEF}$ són semblants i de raó 2:1

$S_{OEF}=\frac{1}{4}(P+Q)$

Els triangles $\overset{\Delta}{AHF}, \overset{\Delta}{CDH}$ són semblants i de raó 1:2

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{P+Q}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(P+Q)+\frac{1}{8}-(P+Q)}=\frac{1}{4}$$

Aleshores,

$P+Q=\frac{1}{12}$

$S_{OEF}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{48}, S_{AFE}=\frac{1}{8}-(P+Q)=\frac{1}{24}$

Notem que $P.K$ són paral·lels al costat $\overline{AB}$ ja que els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{MOK}$ també són semblants i de raó 2:1

$S_{OMK}=2\cdot S_{OEF}=2\cdot\frac{1}{48}=\frac{1}{24}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AHG}, \overset{\Delta}{MEG}$ són semblants i de raó 2:3. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{Q}{S_{AEM}-S_{AEF}-S_{AFG}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{Q}{\frac{3}{16}-\frac{1}{24}-P}=\frac{4}{9}$$

Simplificant:

$Q=\frac{7}{108}-\frac{4}{9}P$

Resolent el sistema:

$P=\frac{1}{30}, Q=\frac{1}{20}$

$S_{BKM}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$

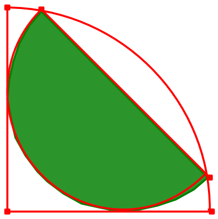
$S_{GHBK}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{60}$

L'àrea ombrejada és:

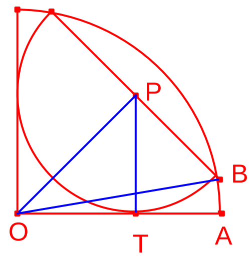
$$S_{ombrejada}=S_{ADE}+2\cdot S_{EFO}+2\cdot S_{AFG}+2\cdot S_{OMK}+2\cdot S_{GHBK}=$$
$$=\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{48}+2\cdot\frac{1}{30}+2\cdot\frac{1}{24}+2\cdot\frac{7}{60}=\frac{11}{20}$$

2599.- En un quadrant s'ha inscrit un semicercle

Calculeu la proporció entre les àrees del semicercle i del quadrant.



Solució:
Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ radi del quadrant.
Siga $\overline{PB} = \overline{PT} = r$ radi del quadrat. T punt de tangència.

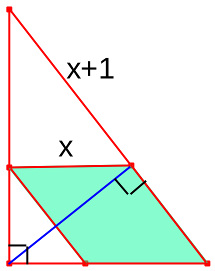


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\overline{OP} = r\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPB}$:
$2r^2 + r^2 = 1$
$r^2 = \frac{1}{3}$

La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{semi}}{S_q} = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot r^2}{\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

2600.- En la figura, calculeu l'àrea del rombe ombrejat.



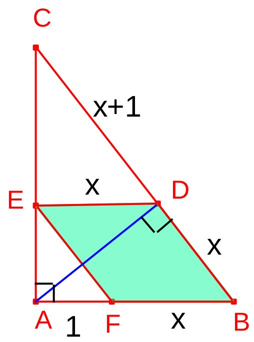
Solució:
Siga el rombe $BDEF$ de costat $\overline{DE} = x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CED}, \overset{\Delta}{ADB}$ són iguals.
Aleshores,
$\overline{AF} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CED}, \overset{\Delta}{CAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Resolent l'equació:
$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, nombre d'or.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{EAF}$

$\overline{AE} = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\Phi^2 - 1} = \sqrt{\Phi}$

L'àrea del rombre és:
$S_{BDEF} = \Phi\sqrt{\Phi} \approx 2.0582$