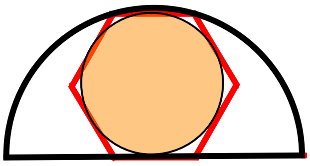
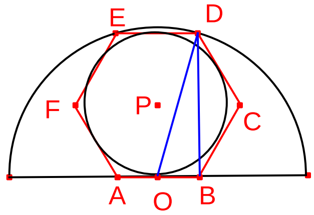
2601.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea del cercle inscrit a l'hexàgon regular i l'àrea del semicercle.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre P.
Siga O el punt mig del costat $\overline{AB}$, centre del semicercle
Siga $\overline{OD} = r$ radi del semicercle.



$\overline{BD} = c\sqrt{3}$

$\overline{PO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = c\frac{\sqrt{3}}{2}$ radi del cercle inscrit a l'hexàgon.

$\overline{OB} = \frac{1}{2}c$

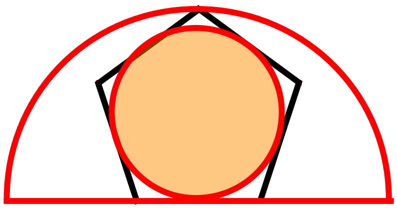
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBD}$.

$$r^2 = \frac{1}{4}c^2 + 3c^2 = \frac{13}{4}c^2$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\pi\frac{3}{4}c^2}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{\frac{3}{4}c^2}{\frac{1}{2}\frac{13}{4}c^2} = \frac{6}{13}$$

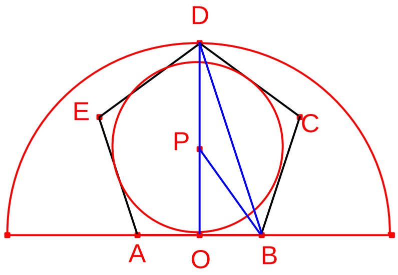
2602.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea del cercle inscrit al pentàgon regular i l'àrea del semicercle.



Solució:

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre P.

$$\overline{BD} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Siga O el punt mig del costat $\overline{AB}$, centre del semicercle

Siga $\overline{OD} = r$ radi del semicercle.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOB}$:

$$r^2 = \Phi^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \Phi = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$$

Siga $s = \overline{PO}$ radi del cercle inscrit al pentàgon regular.

$\angle OPB = 36°$

Aplicant raons trigonomètriques a triangle rectangle $\overset{\Delta}{POB}$:

$$\frac{1}{2s} = \tan 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

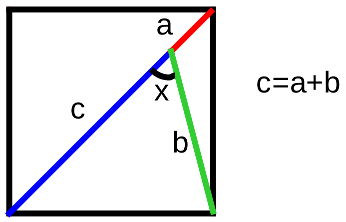
$$s = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$s^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\left(5-\sqrt{5}\right)} = \frac{5+2\sqrt{5}}{20}$$

La proporció d'àrees és:

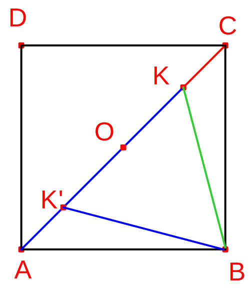
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\pi s^2}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}{\frac{1}{2}\frac{5+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{2}{5}$$

2603.- Amb un punt de la diagonal d'un quadrat és formen els segments de longituds a, b, c tal que $c = a + b$
Determineu la mesura de l'angle x



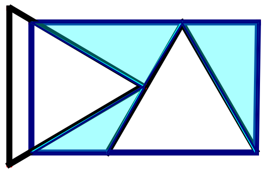
Solució
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga K el punt en la diagonal $\overline{AC}$ tal que $\overline{CK} = a, \overline{BK} = b, \overline{AK} = c, c = a + b$

Siga K' de la diagonal $\overline{AC}$ tal que $\overline{CK'} = a,$



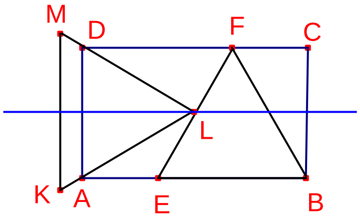
Els triangles $\overset{\Delta}{BCK}, \overset{\Delta}{BAK'}$ (CAC)
Aleshores, $\overline{BK} = \overline{BK'} = b = c - a$
$\overline{KK'} = c - a$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BKK'}$ és equilàter.
Aleshores, $x = \angle AKB = 60°$

2604.- Determineu la proporció de l'àrea del rectangle que ocupa la zona ombrejada del rectangle exterior als dos triangles equilàters iguals.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.

Siguen els triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{KLM}, \overset{\Delta}{EBF}$ de costat $\overline{EB} = \overline{KL} = c$
El vèrtex L pertany a la paral·lela mitjana del rectangle $ABCD$.



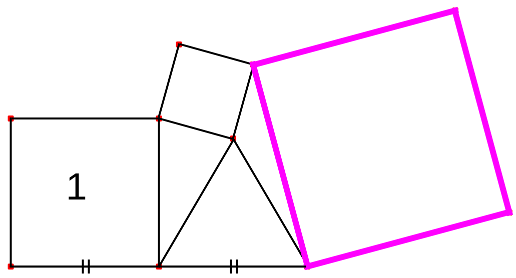
$\overline{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$
$\angle LAE = \angle AEL = 30°$
Aleshores,
$\overline{AE} = \overline{AL} = \dfrac{1}{2}c$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = \frac{3}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2$$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del rectangle $ABCD$ menys la suma de les àrees dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ALD}, \overset{\Delta}{EBF}$:

$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - S_{ALD} - S_{BEF} = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{5\sqrt{3}}{16}c^2$$

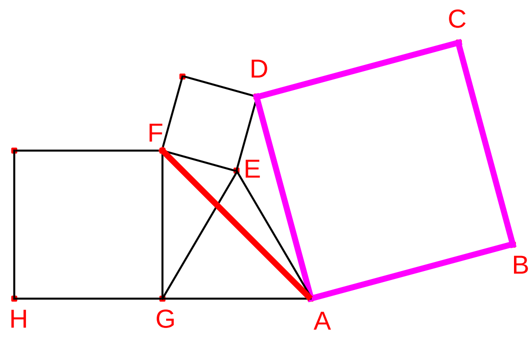
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{16}c^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{5}{12}$$

2605.- En la figura, el quadrat d'àrea 1 i el triangle equilàter estan sobre una recta. Calculeu l'àrea del quadrat gran.

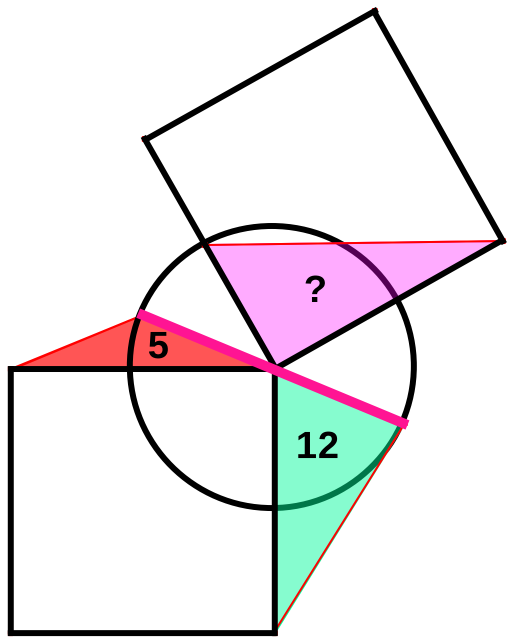


Solució:
$\overline{HG} = \overline{GA} = 1$
Siga el quadrat ABCD
$\angle EGF = 30°$
$\angle AED = 135°$
Els triangles $\overset{\Delta}{AED}, \overset{\Delta}{AEF}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $\overline{AD} = \overline{AF} = \sqrt{2}$
L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = \overline{AD}^2 = 2$

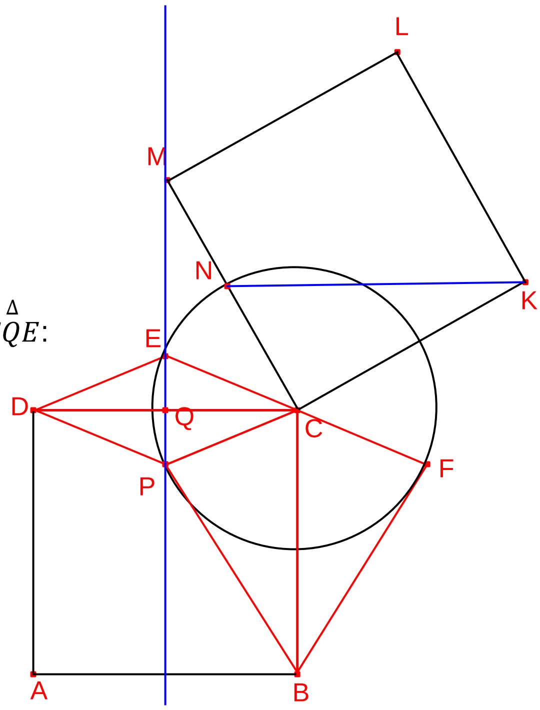


2606.- En la figura hi ha tres triangles i dos quadrats iguals i una circumferència de centre un dels vèrtexs dels quadrats i un diàmetre format per dos costats dels triangles d'àrees 5 (isòsceles) i 12.
Calculeu l'àrea del tercer triangle.

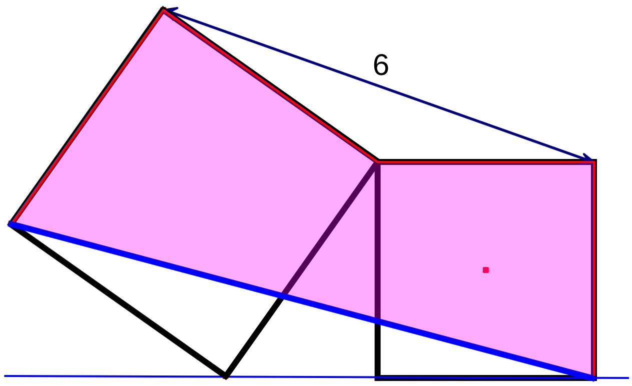


Solució:
Siguen els quadrats iguals $ABCD, CKLM$.
Siga P el punt simètric de E respecte de $\overline{CD}$ i de F respecte de $\overline{BC}$
P pertany a la mediatriu del costat $\overline{CD}$
Siga Q la projecció de E sobre el costat $\overline{CD}$
Siga $\overline{CE} = \overline{CF} = \overline{CN} = \overline{CP}$
$S_{BCQ} = S_{BFC} = 12$
$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{BCQ} = 4 \cdot 12 = 48$
$\overline{CD} = 4\sqrt{3}$
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{CDE}$ és 5:
$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \overline{EQ} = 5$$
$$\overline{EQ} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$
$$\overline{CQ} = 2\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQE}$:
$$x^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{169}{12}$$
$$x = \frac{13\sqrt{3}}{6}$$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKN}$ és:
$$S_{CKN} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{13\sqrt{3}}{6} = 13$$



2607.- Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = b$
Siga $\angle DGA = \alpha$

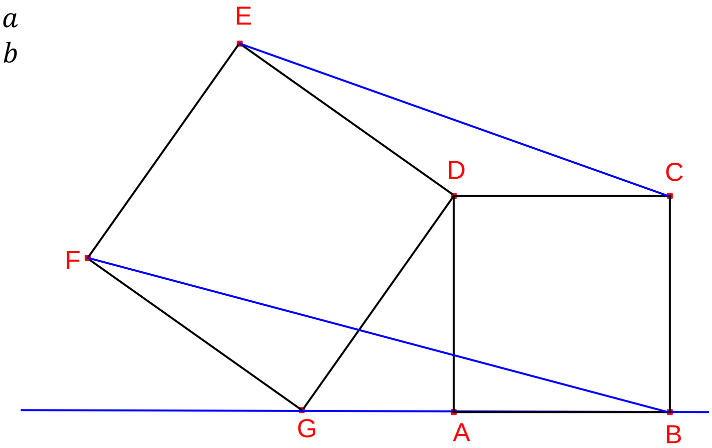
$\sin \alpha = \frac{a}{b}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

$\angle EDC = 90° + \alpha$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$6^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(90° + \alpha)$

$b^2 + 3a^2 = 36$

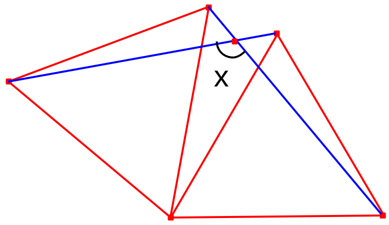


$\overline{AG} = \sqrt{b^2 - a^2}, \overline{BG} = a + \sqrt{b^2 - a^2}$

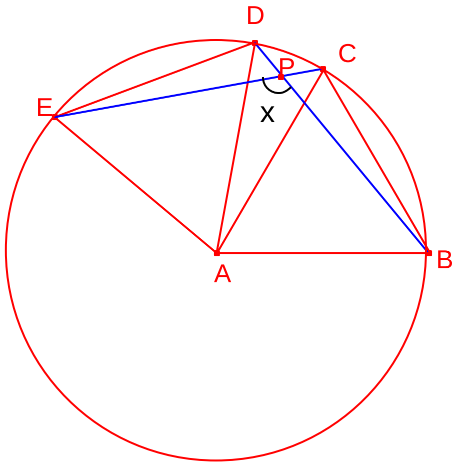
$S_{BCDEF} = S_{ABCD} + S_{DEFG} - S_{FGB}$

$S_{BCDEF} = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}b\left(a + \sqrt{b^2 - a^2}\right)\sin(90° + \alpha) = \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 18$

2608.- Els dos triangles equilàters són iguals.
Determineu la mesura de l'angle x



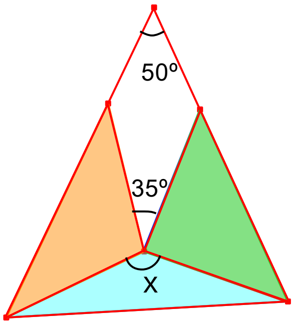
Solució:



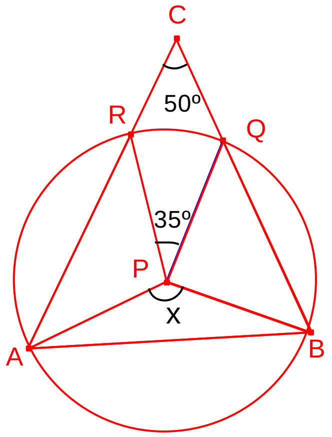
Siguen els triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}$.
Siga P la intersecció dels segments $\overline{BD}, \overline{EC}$.
El punt A equidista dels punts B, C, D, E
Considerem la circumferència de centre A que passa pels punts B, C, D, E
Siga $\alpha = \angle CAD$
$\widehat{CD} = \alpha$
$\widehat{BCE} = 2 \cdot 60° + \alpha$

L'angle interior mesura la semisuma dels arcs que abraça:
$$x = \angle BPE = \frac{\widehat{CD} + 360° - \widehat{BCE}}{2} = \frac{\alpha + 360° - (120° + \alpha)}{2} = 120°$$

2609.- Els tres triangles ombrejats de la figura són isòsceles.
Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:



Siga el triangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siguen els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{BQP}, \overset{\Delta}{ARP}$

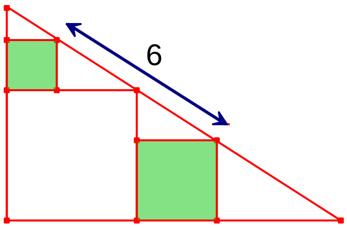
El punt P equidista dels punts B, C, Q, R
Considerem la circumferència de centre P que passa pels punts B, C, Q, R

L'angle exterior mesura la semidiferència dels arcs que abraça:

$$50° = \frac{\widehat{AB} + \widehat{RQ}}{2} = \frac{x - 35°}{2}$$

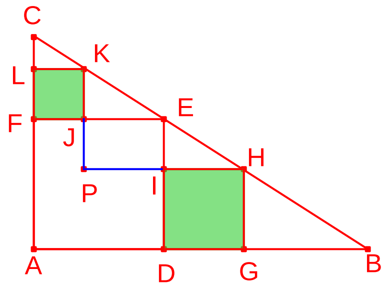
$$x = 135°$$

2610.- Tres quadrats estan en l'interior d'un triangle rectangle.
Calculeu la suma de les àrees dels quadrats ombrejats.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el quadrat DGHI de costat $\overline{DG} = a$
Siga el quadrat FJKL de costat $\overline{FJ} = b$



Siga $x = \overline{EI}, y = \overline{JE} = x$
$a + x = b + y$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KLE}, \overset{\Delta}{EIH}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$
$a + x = b + \frac{ab}{x}$
$ax + x^2 = bx + ab$
$x(a + x) = b(a + x)$
Aleshores:
$x = b, y = a$

Aplicant el teorema de Pitpagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPH}$:
$(a + y)^2 + (b + x)^2 = 6^2$
$(2a)^2 + (2b)^2 = 36$
$a^2 + b^2 = 9$
La suma de les àrees dels quadrats ombrejats és:
$S_T = a^2 + b^2 = 9$