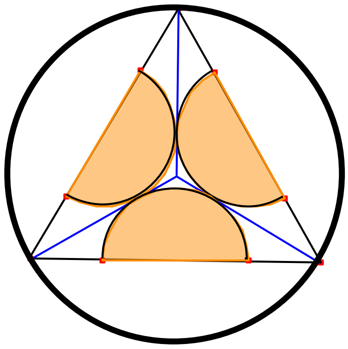
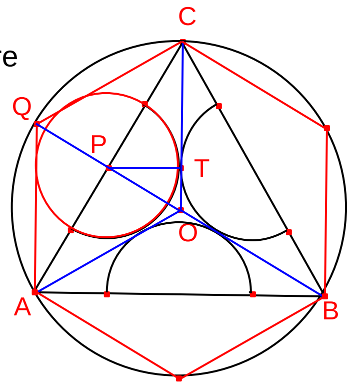
2611.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ inscrit en la circumferència de centre O i radi $\overline{OC} = R$

Siga P el punt mig del costat $\overline{AC}$
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$.

$\overline{OP} = \frac{1}{2}R$

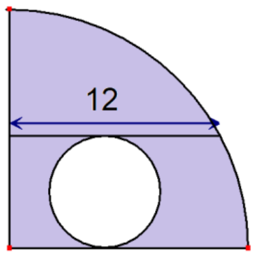
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R$

La proporció de les àrees és:

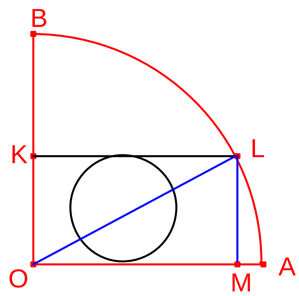
$$\frac{S_3}{S_O} = \frac{\frac{3}{2}\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}$$

2612.- Calculeu l'àrea ombrejada dins del quadrant.



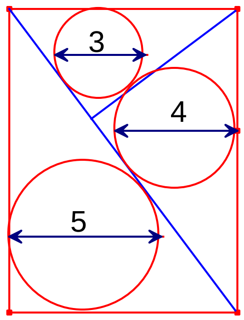
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga $\overline{LM} = 2r$, mesura del radi interior al quadrat i tangent a $\overline{KL} = 12, \overline{OA}$
Siga M la projecció de L sobre el radi $\overline{OA}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OML}$:
$R^2 = (2r)^2 + 12^2$
$R^2 - 4r^2 = 144$

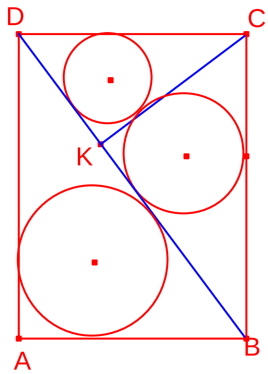


L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4}(R^2 - 4r^2) = 36\pi$$

2613.- Els diàmetres de les tres circumferències inscrites en tres triangles rectangles que formen un rectangle són 3, 4, 5.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{KCB}, \overset{\Delta}{KDC}$ són semblants.
Els costats corresponents són proporcionals als diàmetres dels cercles:
Siga $\overline{CD} = 3k, \overline{BC} = 4k, \overline{BD} = 5k$

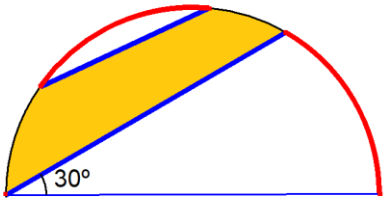


L'àrea del triangle , $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

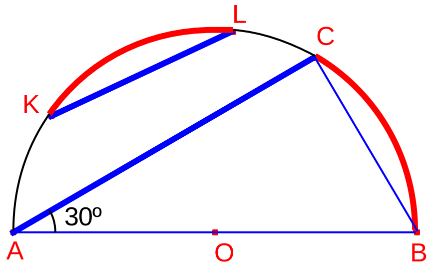
$$S_{ABD} = \frac{1}{2}3k \cdot 4k = \frac{3k + 4k + 5k}{2} \cdot \frac{5}{4}$$

Simplificant:
$k = \frac{5}{4}$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 3k \cdot 4k = 12k^2 = \frac{75}{4}$

2614.- Els dos arc rojos del semicercle són iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



Siga $\overline{OA} = R$ radi del semicercle.

$\widehat{BC} = \widehat{KL} = 2 \cdot 30° = 60°$

$\widehat{AC} = 2 \cdot 60° = 120°$

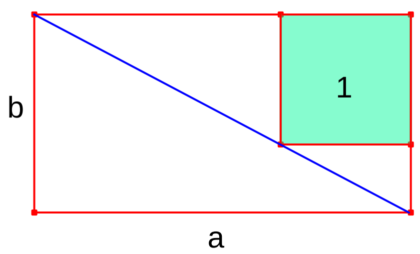
L'àrea ombrejada és igual a la diferència de dos segments circulars de 120º i 60º:

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \left(\frac{1}{6}\pi \cdot R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{\pi}{6}R^2$$

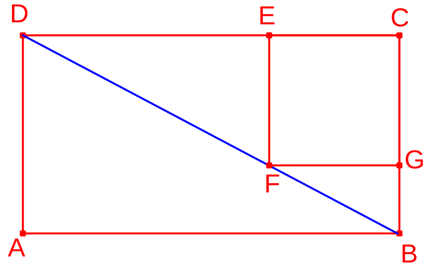
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{\pi}{6}R^2}{\frac{\pi}{2}R^2} = \frac{1}{3}$$

2615.- Un quadrat d'àrea 1 té un vèrtex en la diagonal d'un rectangle de costats a, b.
Calculeu la proporció:
$$\frac{a+b}{ab}$$

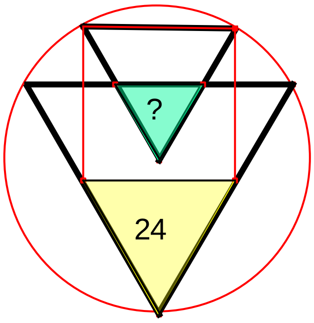


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$
Siga el quadrat CEFG de costat $\overline{CE} = 1$



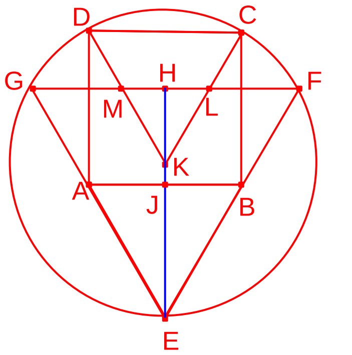
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{FGB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1}{a-1} = \frac{b-1}{1}$$
$$ab - (a+b) + 1 = 1$$
$$ab = a + b$$
Aleshores:
$$\frac{a+b}{ab} = 1$$

2616.- La circumferència conté un quadrat i dos triangles equilàters sobreposats.
Calculeu l'àrea de la intersecció dels dos triangles equilàters i del quadrat.



Solució:

Siguen el quadrat $ABCD$ i els triangles equilàters sobreposats $\overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{CDK}$
Notem que $CKEB$ és un rombe.
Notem que K és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{EFG}$
Siga $\overline{AB} = c$



Siga H el punt mig del segment $\overline{ML}$
Siga J el punt mig del segment $\overline{AB}$

$$\overline{KH} = \frac{1}{2}\overline{EK} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{EJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

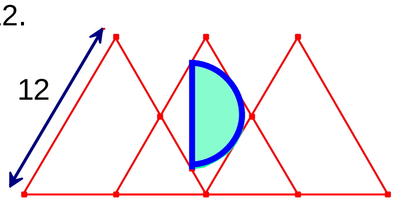
Les àrees del triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{LMK}$ són proporcionals als quadrats de les seues altures:

$$\frac{S_{LMK}}{24} = \left(\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

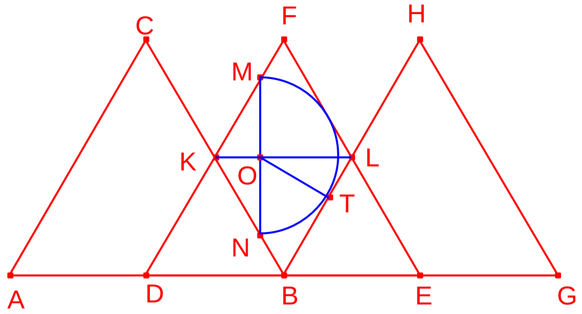
Aleshores:

$$S_{LMK} = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8$$

2617.- Els tres triangles equilàters tenen costat 12.
Calculeu l'àrea del semicercle.



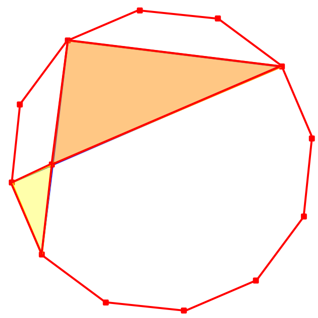
Solució:



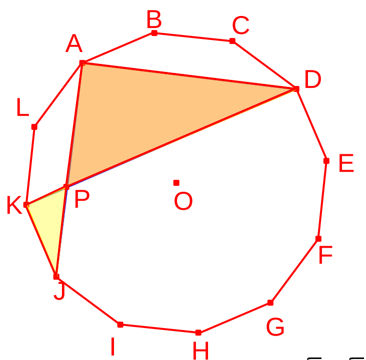
Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{BGH}$ de costat $\overline{AC} = 12$.
$\overline{AD} = 6$
Siguen K, L és interseccions dels triangles equilàters.
$\overline{KL} = 6$
Siga O el centre del semicercle de diàmetre $\overline{MN} = 2r$
$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{3}r, \overline{OL} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$
Sumant els dos segments:
$\sqrt{3}r = 6$
$r = 2\sqrt{3}$

L'àrea del semicercle és:
$S_O = \frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 6\pi$

2628.- La diferència d'àrees entre els dos triangles ombrejats del dodecàgon regular és 2.
Calculeu l'àrea del dodecàgon.



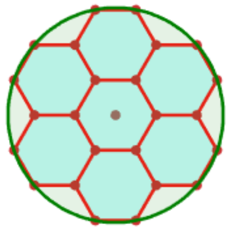
Solució:
Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de costat $\overline{AB} = c$, centre O i radi de la circumferència circumscrita $\overline{OA} = R$.



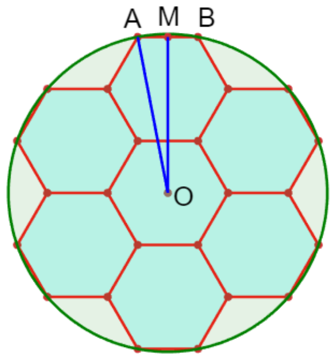
$$\frac{c}{\sin 15°} = 2R$$
$$c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$$
$\overline{AD}$ és igual al costat d'un quadrat inscrit en la circumferència circumscrita al dodecàgon.
$$\overline{AD} = R\sqrt{2}$$
$$\angle ADK = 30°$$
$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3}R$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADP}, \overset{\Delta}{KJP}$ són semblants i de raó $\sqrt{2}:\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADP}$ és:
$$S_{ADP} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}R^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}R^2$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KJP}$ és:
$$S_{KJP} = \left(\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 S_{ADP} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}R^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}R^2$$
La diferència d'àrees dels dos triangles és 2:
$$\frac{\sqrt{3}}{3}R^2 - \frac{2\sqrt{3}-3}{6}R^2 = 2$$
Aleshores:
$$R^2 = 4$$
L'àrea del dodecàgon regular és:
$$S_{12} = 12\cdot\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 30° = 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12$$

2619.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels set hexàgons regulars i l'àrea del cercle.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OA} = R$
Siga $\overline{AB} = c$ costat dels hexàgons regulars.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



$\overline{AM} = \frac{1}{2}c, \overline{OM} = \frac{3}{2}c\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

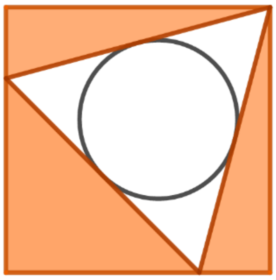
$R^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{27}{4}c^2$

$R^2 = 7c^2$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{7 \cdot S_H}{S_O} = \frac{7 \cdot 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.8270$$

2620.- Una circumferència de radi 1 està inscrit en un triangle equilàter.
El triangle equilàter està inscrit en un quadrat.
Calculeu l'àrea ombrejada de la figura.



Solució:
Siga La circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = 1$

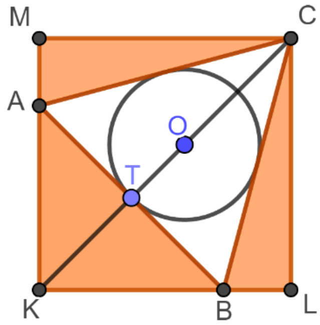
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

Aplicant la propietat del baricentre.

$\overline{OC} = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATC}$:

$c^2 = 12$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}$:

$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \sqrt{6}$$

$$\overline{KC} = 3 + \sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLC}$:

$$\overline{KL} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{KC} = \left(3 + \sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\overline{BL} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} - \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S = \frac{1}{4}c^2 + \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} = 6$$