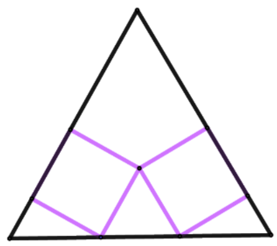
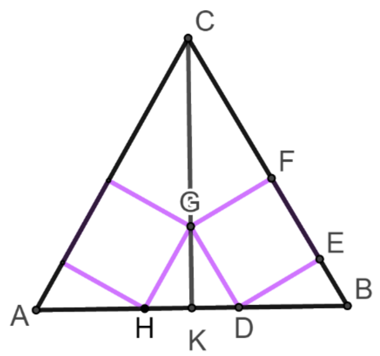
2621.- Els dos quadrats tenen costat unitari
Calculeu l'altura del triangle

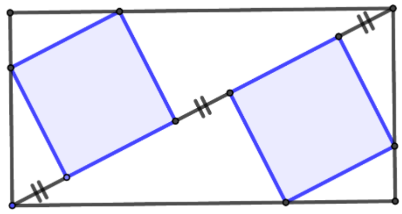


Solució:

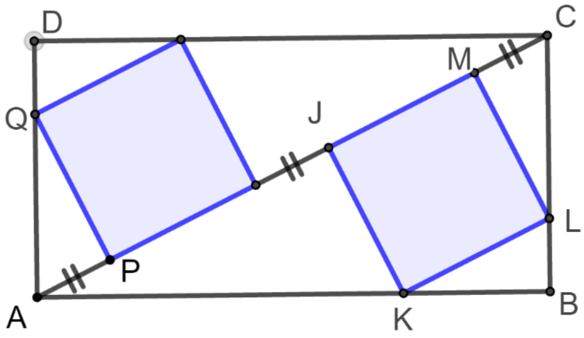
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = 1$
El triangle $\overset{\Delta}{DGH}$ és equilàter.
$\overline{GK} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF} = 2$
$\overline{CH} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$



2622.- Dos quadrats estan sobre la diagonal d’un rectangle.
Els segments marcats són iguals.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea del rectangle.



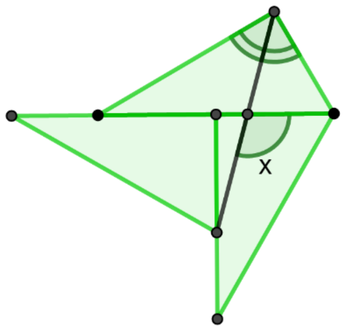
Solució:
Siga el rectangle ABCD.
Siga el quadrat JKLM de costat $\overline{JK} = c$
Siga $x = \overline{AP}$
$\overline{AJ} = c + 2x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJK}, \overset{\Delta}{QPA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{c} = \frac{c}{c + 2x}$$
$$2x^2 + cx - c^2 = 0$$
Resolent l’equació:
$$x = \frac{1}{2}c$$

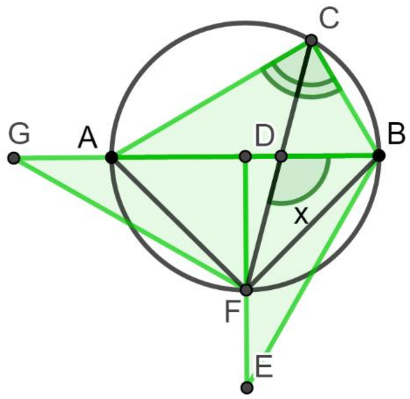
$$\overline{AQ} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$
$$\overline{AC} = 3x + 2c = \frac{7}{2}c$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{QPA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{7}{2}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$$
$$\overline{BC} = \frac{7\sqrt{5}}{10}c$$
$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} = \frac{7\sqrt{5}}{5}c$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{2 \cdot S_{JKLM}}{S_{ABCD}} = \frac{2c^2}{\frac{7\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{10}c^2} = \frac{20}{49}$$

2623.- En la figura hi ha tres triangles rectangles iguals. En l'angle recte del triangle superior s'ha traçat la bisectriu.
Determineu la mesura de l'angle x



Solució:

Siguen els triangles rectangles iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EBD}, \overset{\Delta}{GFD}$
$\angle ACF = \angle BCF = 45°$

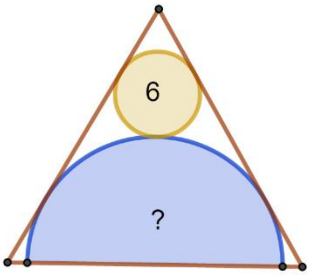


$\overline{BD} = \overline{DF}$
Aleshores:
$\angle DBF = 45°$

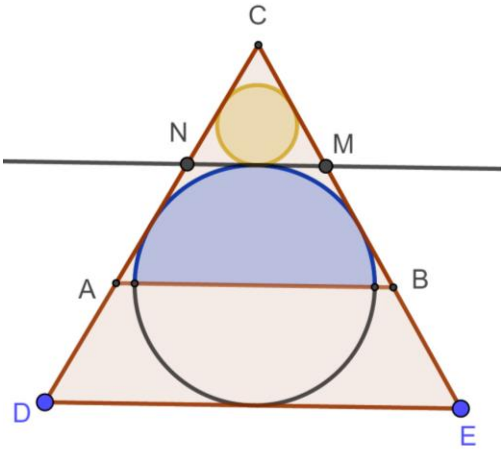
Els punts B, C pertanyen a l'arc capaç del segment $\overline{AF}$
Considerem la circumferència que passa pels punts A, B, C, F.
$\angle AFB = 90°$
Aleshores:
$\angle FAB = 45°$
Aleshores, $\overline{AD} = \overline{DF}$
El centre de la circumferència és el punt mig D de la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

A més a més, $\overline{BD} = \overline{BC}, \overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$
Per tant, $\angle ABC = 60°$
$x = \angle FDB = 45° + 60° = 105°$

2624.- Calculeu l’àrea del semicercle inscrit en el triangle equilàter.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

Construïm la circumferència que diàmetre el de la semicircumferència.

Construïm el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{DEC}, \overset{\Delta}{NMC}$ són semblants i de raó 3:1.

Les àrees dels cercles inscrits són proporcionals al quadrat de la raó de semblança.

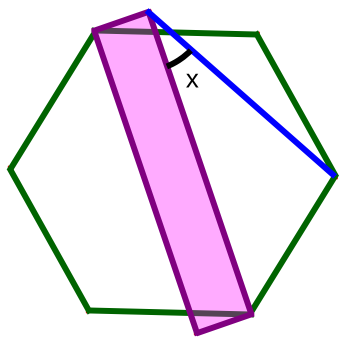
Siga S l’àrea del cercle inscrit en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEC}$

$$\frac{S}{6} = 3^2$$

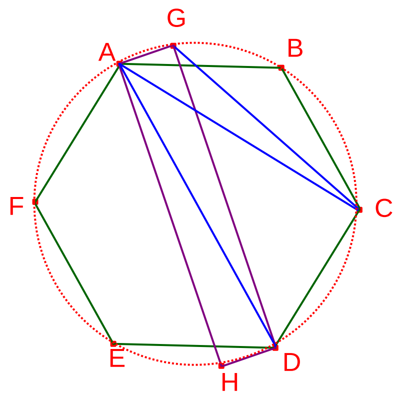
L’àrea del semicercle és:

$$S_{semicercle} = \frac{1}{2}S = 27$$

2635.- En la figura està formada per un hexàgon regular i un rectangle.
Calculeu la mesura de l'angle x.



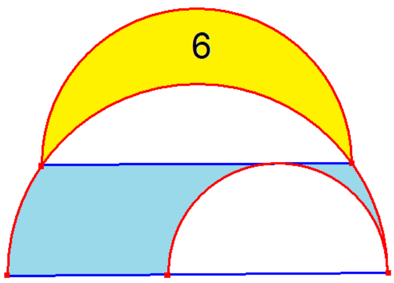
Solució:
Siga $ABCDEF$ l'hexàgon regular.
Siga $AGDH$ el rectangle.



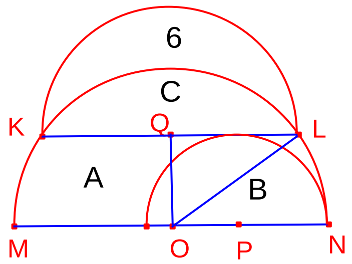
$\angle ACD = 90°$
$\angle AHD = 90°$
Aleshores, el quadrilàter ACDH és inscriptible.
És inscriptible en la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular.

Aleshores, G pertany a la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular.
$\angle DGC = \angle DAC = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$

2626.- Els diàmetres dels tres semicercles són paral·lels.
L'àrea ombrejada en groc és 6.
Calculeu l'àrea ombrejada en blau.



Solució:
Siga A l'àrea ombrejada en blau.
Sigun B, C les altres dues àrees del recinte.



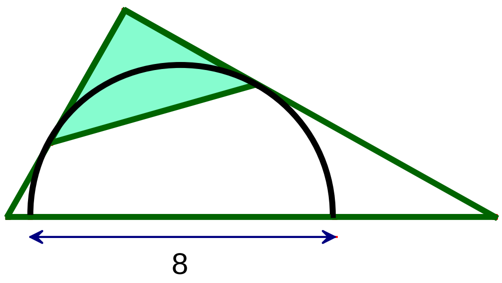
Siga O el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{MN} = 2R$
Siga P el centre de la semicircumferència de radi $\overline{ON} = r$
Siga Q el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{KL} = 2s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQL}$:
$R^2 = r^2 + s^2$

$$\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi s^2$$

$A + B + C = B + 6 + C$
Simplificant:
$A = 6$

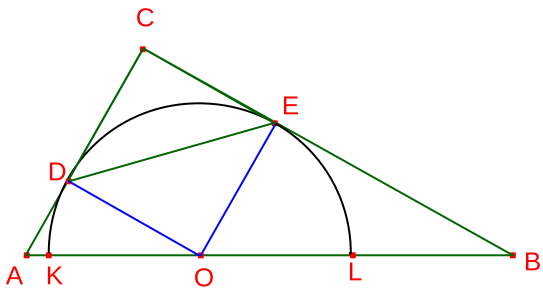
2627.- La semicircumferència és tangent als catets del triangle rectangle i té el diàmetre de longitud 8 sobre la hipotenusa.
Calculeu l'àrea ombrejada.



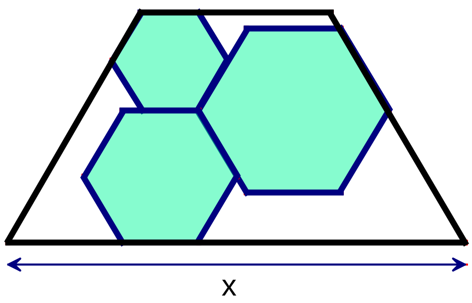
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$
Siga O el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{KL} = 8$
Siguen D, E els punts de tangència.
$ODCE$ és un quadrat de costat 4.

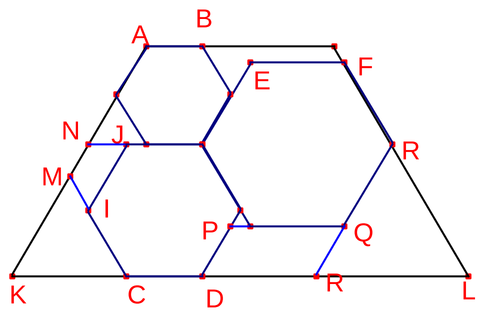
$S_{CDE} = \frac{1}{2}4^2 = 8$



2628.- La suma dels perímetres dels tres hexàgons regulars és 36.
Calculeu la base x del trapezi.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ costat de l'hexàgon menut.
Siga $\overline{CD} = b$ costat de l'hexàgon mitjà.
Siga $\overline{EF} = c$ costat de l'hexàgon gran.



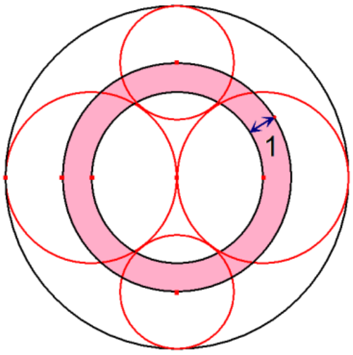
La suma dels perímetres és 36:
$6(a+b+c) = 36$
$a+b+c = 6$

$\overline{NJ} = \overline{MI} = 2a - b$

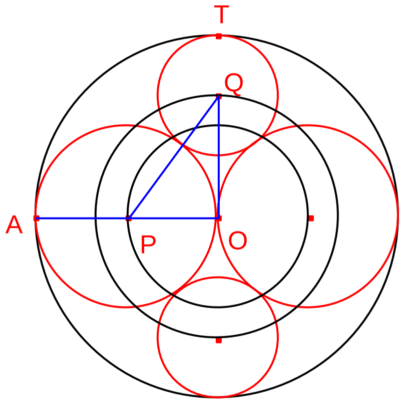
$\overline{KC} = 2a$
$\overline{DP} = \overline{RQ} = 2b - c$
$\overline{PQ} = \overline{DR} = 2c - b$
$\overline{RL} = 2b$

$\overline{KL} = 2a + b + 2c - b + 2b = 2(a+b+c) = 2 \cdot 6 = 12$

2629.- L'amplada de la corona circular és 1.
Calculeu l'àrea del cercle exterior.



Solució:



Siga O el centre de la circumferència exterior de radi $\overline{OA} = R$

Siga P el centre de la circumferència mitjana de radi $\overline{PA} = r = \frac{1}{2}R$

Siga Q el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{QT} = s$

$\overline{OQ} = R - s = 2r - s, \overline{PQ} = r + s, \overline{PO} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POQ}$:

$(r+s)^2 = r^2 + (2r-s)^2$

Simplificant:

$s = \frac{2}{3}r$

L'amplada de la corona circular de radis $R - s, r$ és 1:

$R - s - r = 1$

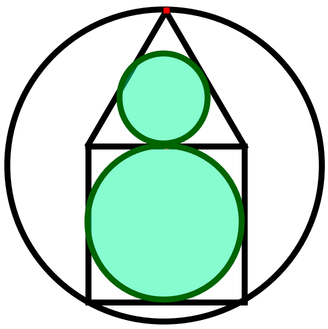
$\frac{1}{3}r = 1$

$r = 3$

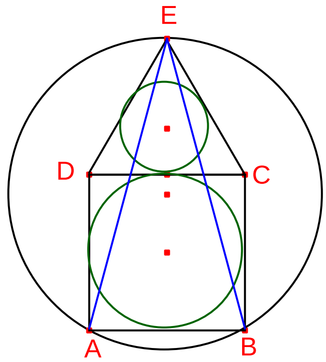
L'àrea del cercle exterior:

$S = \pi(2r)^2 = 36\pi$

2530.- Dues circumferències estan inscrites en un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada dels dos cercles i l'àrea exterior.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$ de costat $\overline{CD} = c$



$\angle AEB = 30°$
Aleshores, $\overline{AB} = c$ és igual al costat d'un hexàgon inscrit a la circumferència exterior.
El seu radi és $R = c$

El radi de la circumferència inscrita al quadrat és:
$r = \frac{1}{2}c$
El radi de la circumferència inscrita al triangle equilàter és:
$s = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{6}c$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{\pi r^2 + \pi s^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{12}c^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$