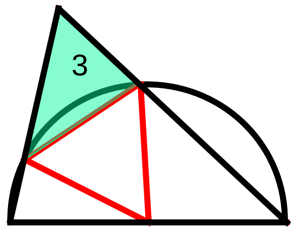
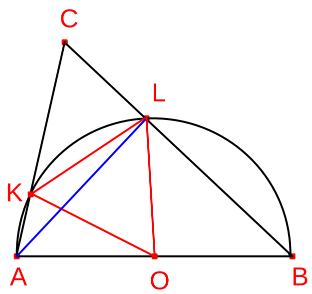
2641.- Un vèrtex del triangle equilàter roig és el centre del semicercle.
Calculeu l'àrea del triangle negra sabent que l'àrea del triangle ombrejat és 3.



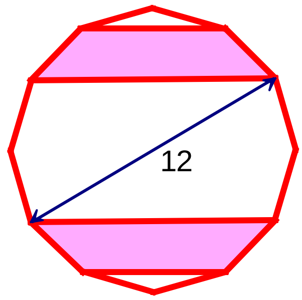
Solució:

Siga el triangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}$
$\angle ACB = \frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$
Siga el triangle $\overset{\Delta}{KLC}$ d'àrea 3.
Siga $\overline{CL} = x, \overline{CK} = y$
$\angle ALB = 90°$
$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CL} = 2x$



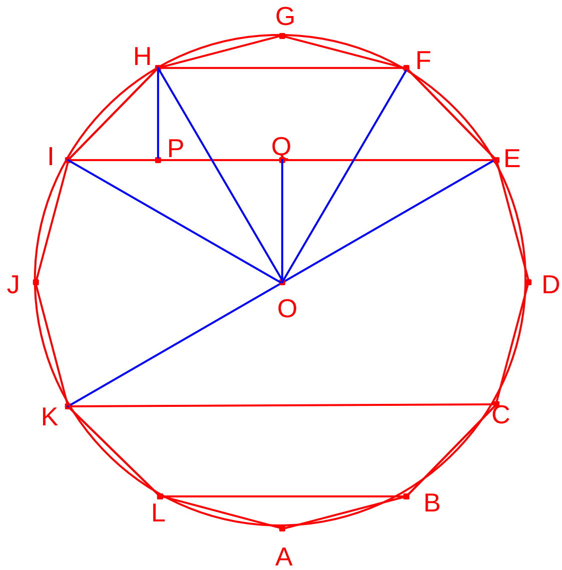
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$:
$x \cdot \overline{CB} = y \cdot 2x$
Simplificant:
$\overline{CB} = 2y$
Els triangles $\overset{\Delta}{KLC}, \overset{\Delta}{BAC}$ són semblants i de raó 1:2.
Aleshores:
$S_{BAC} = 2^2 \cdot S_{KCL} = 12.$

2642.- Calculeu l'àrea ombrejada de la figura.



Solució:

Siga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ de centre O.



$\overline{KL} = 12$ diàmetre de la circumferència circumscrita.

El radi és $R = 6$.

El triangle $\overset{\Delta}{OFH}$ és equilàter.

$\overline{HF} = 6$

$\angle HIE = 45°, \angle IOE = 120°$

Siga P la projecció de H sobre el segment $\overline{IE}$

Siga Q la projecció de O sobre el segment $\overline{IE}$

$\angle QOI = 60°$

$\overline{IQ} = 3\sqrt{3}$

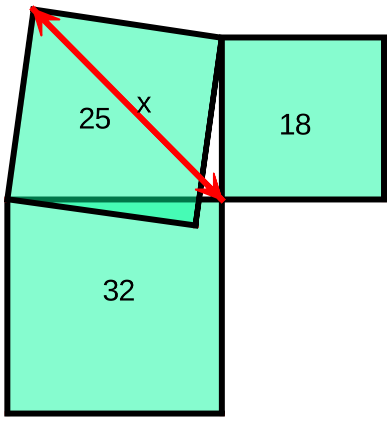
$\overline{IE} = 6\sqrt{3}, \overline{IP} = \frac{1}{2}(\overline{IE} - \overline{HF}) = 3\sqrt{3} - 3$

$\overline{HP} = \overline{IP} = 3\sqrt{3} - 3$

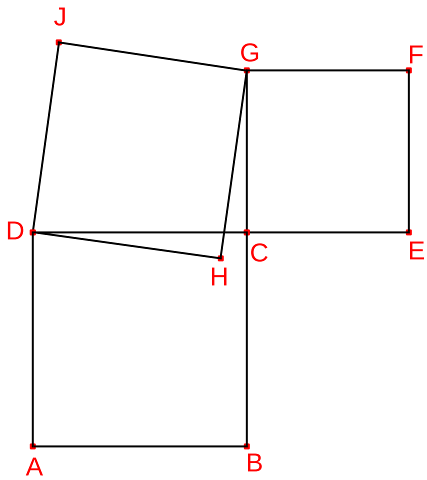
L'àrea de la regió ombrejada és:

$$S = 2 \cdot S_{IEFH} = 2\left(\frac{\overline{IE} + \overline{FH}}{2} \cdot \overline{HP}\right) = 2 \cdot \frac{6\sqrt{3} + 6}{2}\left(3\sqrt{3} - 3\right) = 36$$

2643.- En la figura hi ha tres quadrats d'àrees 32, 18 i 25.
Calculeu la mesura x.



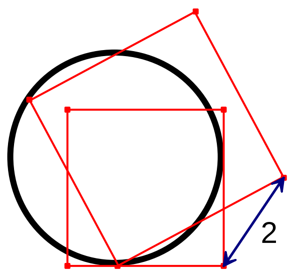
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 32.
Siga el quadrat $CEFG$ d'àrea 18
Siga el quadrat $DHGJ$ d'àrea 25
$\overline{CD} = 4\sqrt{2}, \overline{CG} = 3\sqrt{2}, \overline{DH} = 5, \overline{DG} = 5\sqrt{2}$



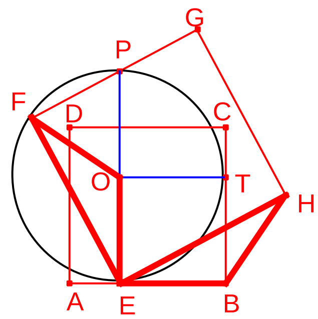
Siga $x = \overline{CJ}$
Siga $\alpha = \angle GDC$
$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{JDC}$
$\angle JDC = 45° + \alpha$
Aplicant el teorema del cosinus:
$x^2 = 5^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos(45° + \alpha)$
$x^2 = 25 + 32 - 40\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3}{5}\right)$
$x^2 = 49$
$x = 7$

2644.- En la figura, la circumferència és tangent a dos costats del quadrat menut i passa per dos vèrtexs del quadrat gran.
La distància entre els dos vèrtexs de la figura és 2.
Calculeu l'àrea del cercle.



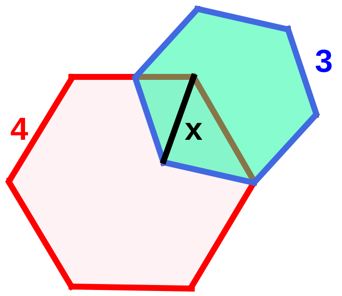
Solució:
Considerem els quadrats $ABCD, EFGH, \overline{BH} = 2$
El punt E punt de tangència.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{BC}$.
El centre O de la circumferència forma el quadrat $EBTO$.



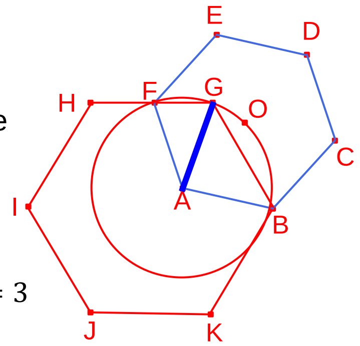
Si efectuem un gir de 90º de centre E del triangle $\overset{\Delta}{EBH}$ és transforma en el triangle $\overset{\Delta}{EOF}$
Aleshores, $\overline{OF} = \overline{BH} = 2$, radi de la circumferència.

L'àrea del cercle és:
$S = \pi 2^2 = 4\pi$

2645.- Els hexàgons regulars de la figura tenen costats 3 i 4, respectivament.
Calculeu la mesura del segment x



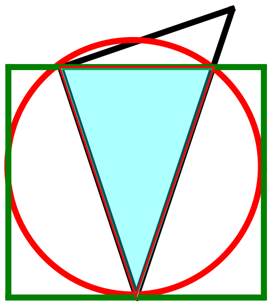
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat 3 i centre O.
Siga l'hexàgon regular $BGHIJK$ de costat 4.



La circumferència de centre A que passa per B passa pel centre de l'hexàgon regular.
$\angle FGB = 120°$
$\angle FGB = \angle FOB = 120°$

Aleshores, G pertany a la circumferència de centre A i radi $\overline{AO} = 3$
Aleshores, $\overline{AG} = 3$

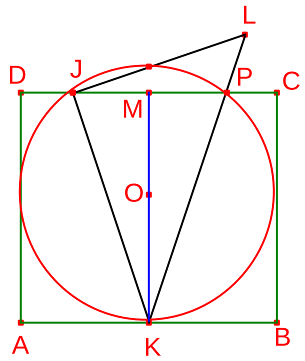
2646.- A la figura hi ha un rectangle un cercle i un triangle 3-4-5.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{JKL}, \overline{JL} = 3, \overline{JK} = 4, \overline{KL} = 5$.
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga la circumferència de centre O tangent als costats $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AD}$ del rectangle.
El diàmetre mesura $\overline{AB} = 2R$

La circumferència talla el costat $\overline{CD}$ en els punts J, P
$\overline{JK} = \overline{PK} = 4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$



Siga $x = \overline{KM}, y = \overline{JM}$
Siga $\alpha = \angle JKP$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMJ}$:

$$\frac{x}{4} = \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}$$
$$x = \frac{6}{5}\sqrt{10}$$

$$\frac{y}{4} = \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}$$
$$y = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

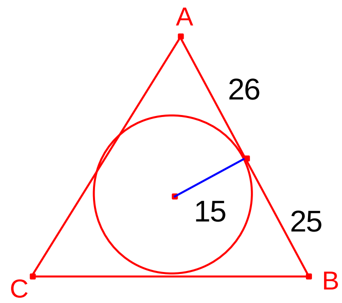
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{JKP}$:

$$\frac{2y}{\sin\alpha} = 2R$$
$$\frac{\frac{4}{5}\sqrt{10}}{\frac{3}{5}} = 2R$$
$$2R = \frac{4}{3}\sqrt{10}$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{JKP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}2yx}{2Rx} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{10}\cdot\frac{6}{5}\sqrt{10}}{\frac{4}{3}\sqrt{10}\cdot\frac{6}{5}\sqrt{10}} = \frac{3}{10}$$

2647.- El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 15.
El punt de tangència divideix el costat $\overline{AB}$ en dos segments que mesuren 26 i 25.
Calculeu l'àrea del triangle.

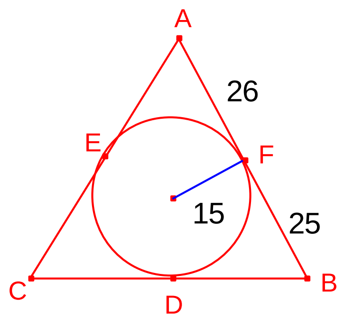


Solució:
Siguen D, E, F els punts de tangència.
$\overline{AF} = \overline{AE} = 26, \overline{BF} = \overline{BD} = 25$
Siga $\overline{CD} = \overline{CE} = x$

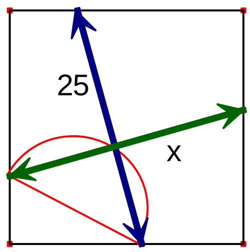
$$S_{ABC} = \frac{a+b+c}{2} r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$(x + 26 + 25)15 = \sqrt{(x + 26 + 25)x \cdot 25 \cdot 26}$
Elevant al quadrat:
$(x + 51)15^2 = 25 \cdot 26x$
Resolent l'equació:

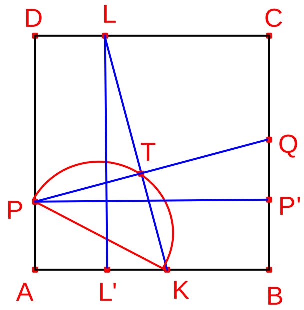
$x = 27$
L'àrea del triangle és:
$S_{ABC} = (27 + 26 + 25) \cdot 15 = 1170$



2648.- En la figura hi ha un quadrat i un semicercle.
Calculeu la distància x desconeguda.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga $\overline{KL} = 25, \overline{PQ} = x$
Siga T la intersecció de $\overline{KL}, \overline{PQ}$.
$\angle KPQ = 90°$

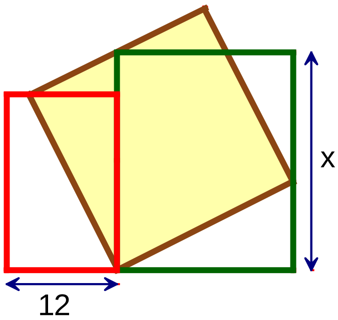


Siga P' la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$
Siga L' la projecció de L sobre el costat $\overline{AB}$

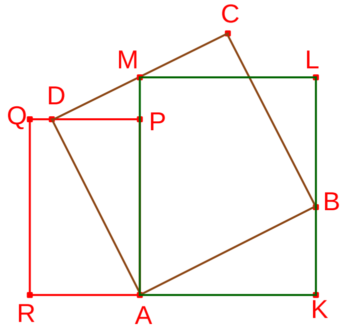
Siga $\angle PQP' = \alpha$
$\angle TKB = 180° - \alpha$
$\angle L'KL = \alpha$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LL'K}, \overset{\Delta}{PP'Q}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{KL} = 25$

2649.- El quadrat groc té doble àrea que el rectangle roig que té un costat de longitud 12.
Calculeu la mesura del costat x del l'altre rectangle.



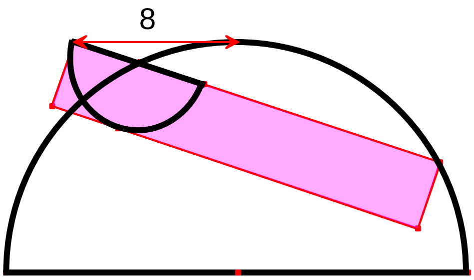
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el rectangle $APQR$ de costats $\overline{AR} = 12, \overline{AP} = x$.
Siga el rectangle $AKLM$.
Siga $\overline{MP} = y$



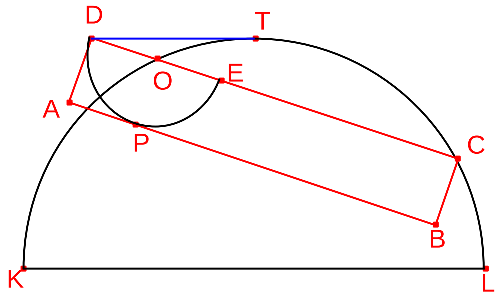
$$S_{APQR} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$
$$12x = \frac{1}{2} c^2$$
$$\frac{c^2}{x} = 24$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{ADM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x+y}{c} = \frac{c}{x}$$
$$\overline{KL} = x + y = \frac{c^2}{x} = 24$$

2650.- En la figura el segment de longitud 8 és paral·lel al diàmetre de la semicircumferència gran.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:
Siga $\overline{DE} = 2r$ diàmetre de la semicircumferència de centre O.
Siga el rectangle $ABCD$ $\overline{AD} = r$
Siga $\overline{CE} = x$
La recta DT és tangent a la semicircumferència gran.
Aplicant la potència del punt D respecte de la semicircumferència gran:
$\overline{DO} \cdot \overline{DC} = \overline{DT}^2$
$r(2r + x) = 8^2$



L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = (2r + x)r = 64$