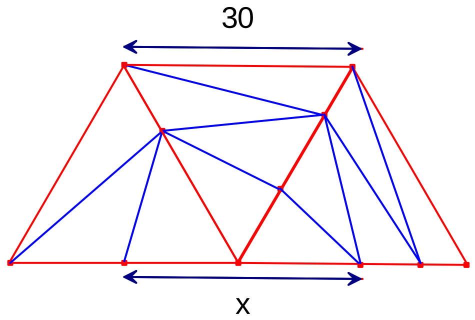
Problemes de Geometria per a l'ESO 266

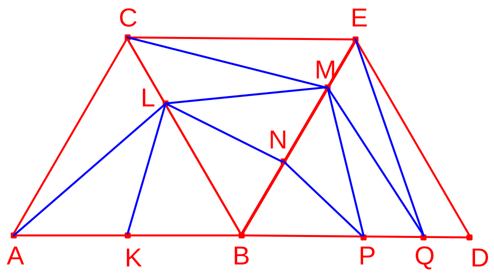
2651.- Els tres triangles equilàters tenen costat 30 i cadascun està dividit en 3, 4 i 5 parts d'igual àrea. Calculeu la mesura de la distància desconeguda x



Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BCE}, \overset{\Delta}{BDE}$ de costat $c = \overline{AB} = 30$ que s'han dividit en 3, 4 i 5 parts respectivament.

$\overline{CL} = \frac{1}{3}c, \overline{BK} = \frac{1}{2}c$



$\overline{EM} = \frac{1}{4}c$

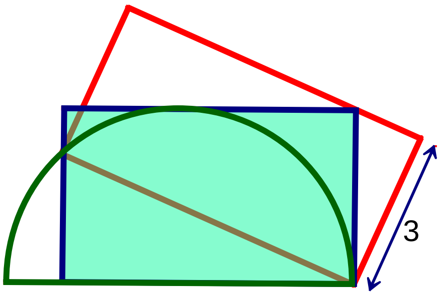
$\overline{BN} = \overline{MN} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}c = \frac{3}{8}c$

$\overline{BP} = \frac{1}{5}\frac{8}{3}c = \frac{8}{15}c$

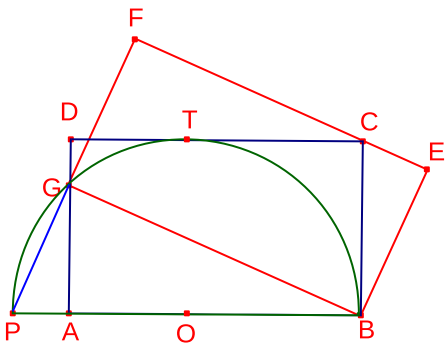
Aleshores:

$x = \overline{KP} = \overline{BK} + \overline{BP} = \frac{1}{2}c + \frac{8}{15}c = \frac{31}{30}c = 31$

2652.- En la figura hi ha dos rectangles i un semicercle.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el rectangle $BEFG$ $\overline{BE} = 3, \overline{BG} = x$
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{PB} = 2r$

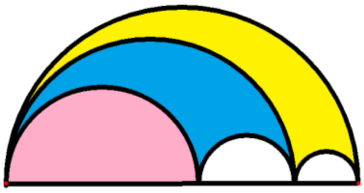


$\overline{OT} = \overline{BC} = r$

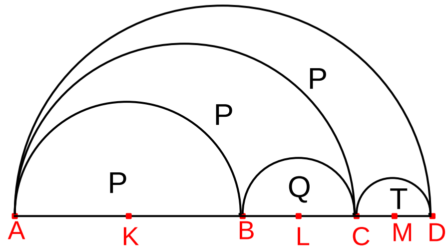
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{BGP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{3}{x} = \frac{r}{2r}$
Aleshores:
$x = 6$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{BAG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{3}{\overline{AB}} = \frac{r}{6}$
Aleshores:
$\overline{AB} = \frac{18}{r}$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = \frac{18}{r} r = 18.$

2653.- Les tres regions acolorides tenen la mateixa àrea. Calculeu la proporció entre les àrees de la suma de les tres regions acolorides i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:
Siga P l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2r$
Siga Q l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{BC} = 2s$
Siga T l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{CD} = 2t$



$$P = \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$P = \frac{1}{2}\pi((r+s)^2 - r^2 - s^2) = \frac{1}{2}\pi(2rs)$$

Igualant ambdues expressions:
$r = 2s$

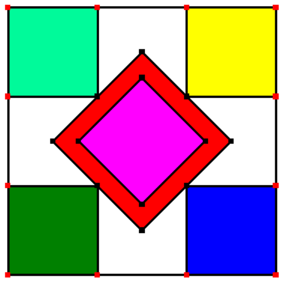
$$P = \frac{1}{2}\pi((r+s+t)^2 - (r+s)^2 - t^2) = \frac{1}{2}\pi(2st + 2rt)$$

Igualant la segona i tercera expressió:
$st + rt = rs$
$st + 2st = rs$
Simplificant:
$r = 3t$

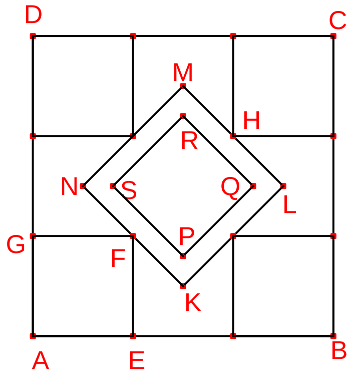
La proporció de les àrees és:

$$\frac{3P}{3P+Q+T} = \frac{3\cdot\frac{\pi}{2}r^2}{3\cdot\frac{\pi}{2}r^2 + \frac{\pi}{2}s^2 + \frac{\pi}{2}t} = \frac{3r^2}{3r^2 + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{9}r^2} = \frac{108}{121}$$

2654.- Les sis regions ombrejades del quadrat tenen la mateixa àrea.
Calculeu la proporció de l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.

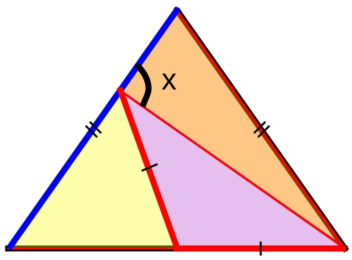


Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat exterior.
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = c$
$\overline{AF} = c\sqrt{2}$
Siga el quadrat $KLMN$ d'àrea el doble que l'àrea del quadrat $AEFG$.
Aleshores:
$\overline{KL} = \overline{FH} = c\sqrt{2}$
$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AF} + \overline{FH} = 2c\sqrt{2} + c\sqrt{2} = 3c\sqrt{2}$
$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3c\sqrt{2} = 3c$



L'àrea ombrejada és igual a sis vegades l'àrea del quadrat $AEFG$.
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{6 \cdot c^2}{(3c)^2} = \frac{2}{3}$$

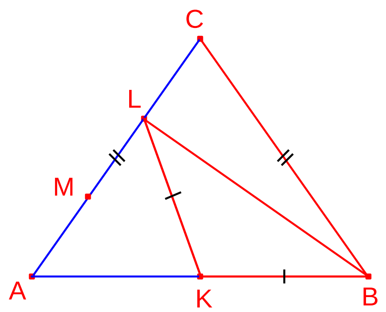
2655.- El triangle isòsceles exterior de la figura s'ha dividit en 3 parts d'igual àrea.
El triangle del mig també és isòsceles.
Calculeu l'angle desconegut.
Calculeu els angles del triangle exterior.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{KBL}$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores:
M és el punt mig del costat $\overline{AB}$



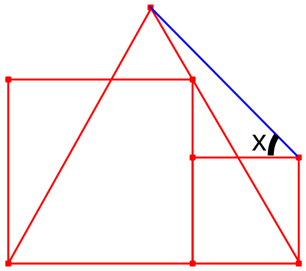
El triangle $\overset{\Delta}{ABL}$ té doble àrea que el triangle $\overset{\Delta}{BCL}$.
Aleshores:
$\overline{AL} = 2 \cdot \overline{CL}$

Siga $\alpha = \angle LAK$
El triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle ALK = \alpha$
$\angle LKB = 2\alpha$
El triangle $\overset{\Delta}{LKB}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle KLB = \angle KBL = 90° - \alpha$

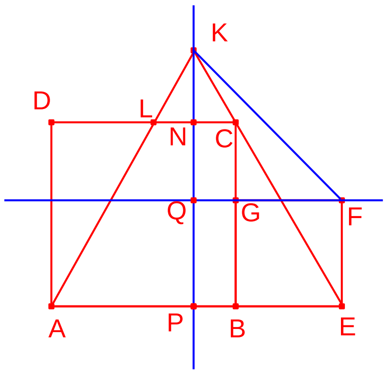
Aleshores:
$\angle ALB = \alpha + 90° - \alpha = 90°$
$\angle CLB = 90°$

Siga $\overline{AK} = \overline{BK} = x, \overline{CL} = y, \overline{CB} = 3y$
$\cos C = \frac{1}{3}$
$C = \arccos\frac{1}{3} = 70°31'44"$
$A = B = 90° - \frac{C}{2} = 54°44'8"$

2656.- La figura està formada per dos quadrats i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AEK}$.



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{LDA}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{DL} = \overline{BE} = b$

$\overline{LC} = \overline{CG} = a - b$

$$\overline{CN} = \overline{GQ} = \frac{1}{2}(a-b)$$

$$\overline{FQ} = \frac{a+b}{2}$$

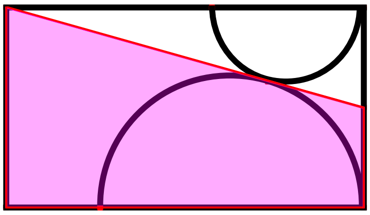
$$\overline{FQ} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}b$$

$$\overline{NK} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$$

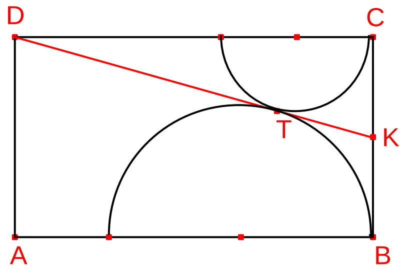
$$\overline{KQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) + a - b = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)b + \left(\sqrt{3}-1\right)b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}b$$

$\overline{FQ} = \overline{KQ}$
Aleshores, $x = \angle GFK = 45°$

2657.- En la figura hi ha dues semicircumferències tangents en un rectangle. Calcula la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.



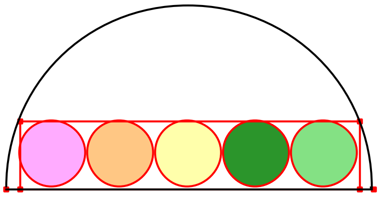
Solució:



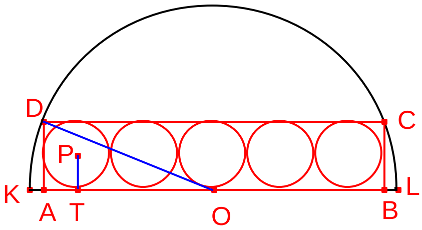
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga T el punt de Tangència de les dues semicircumferències.
$\overline{BK} = \overline{KT}, \overline{CK} = \overline{KT}$

$S_{DCK} = \frac{1}{4} A_{ABCD}$
La proporció de les àrees del quadrilàter $ADKB$ i el rectangle $ABCD$ és:
$\frac{S_{ADKB}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{4}$

2658.- Els cinc cercles tangents i inscrits en el rectangle tenen àrea 1.
Calculeu l'àrea del semicercle exterior.



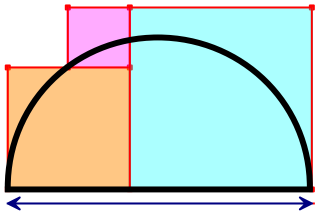
Solució:
Siga $\overline{PT} = \overline{AT} = r = 1$ radi de les circumferències.
Siga el rectangle ABCD $\overline{AD} = 2r, \overline{AB} = 10r$



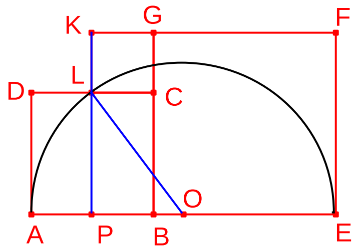
Siga $\overline{OD} = \overline{OK} = R$ radi del semicercle.
$\overline{OA} = 5r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$:
$R^2 = (2r)^2 + (5r)^2$
$R^2 = 29r^2 = 29$
L'àrea del semicercle és:
$S = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{29}{2}\pi$

2659.- Calculeu l'àrea dels tres quadrats sabent que el diàmetre del semicercle és 5.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
$a + b = 5$
Siga el quadrat $CGKL$ de costat $\overline{LC} = b - a$
$\overline{CL} = 2a - b$



Siga P la projecció de L sobre el diàmetre $\overline{AE}$.

$$\overline{OP} = \frac{5}{2} - (2a - b) = \frac{15}{2} - 3a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LPO}$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{15}{2} - 3a\right)^2$$

Simplificant:

$$2a^2 - 9a + 10 = 0$$

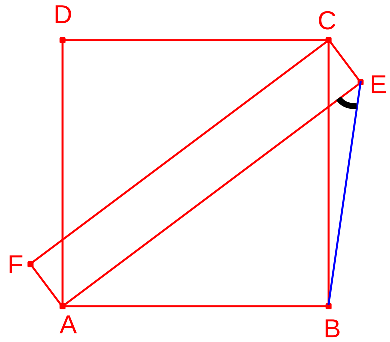
Resolent l'equació:

$$a = 2, b = 3$$

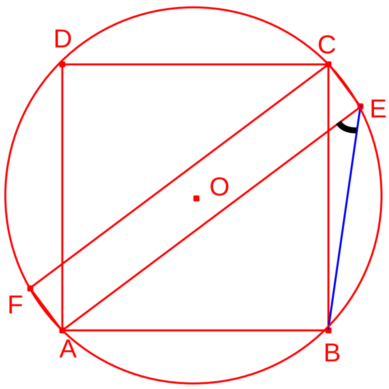
La suma de les àrees dels tres quadrats és:

$$S = a^2 + b^2 + (b - a)^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$$

2660.- Donats dels rectangles $ABCD, AECF$ de la figura, tal que $\overline{AB} = 5, \overline{AE} = 7, \overline{AF} = 1$
Determineu l'angle $\angle AEB$.



Solució:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEC}$.
$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{BC} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 5^2} = 5$
Aleshores, $ABCD$ és un quadrat.
Siga O el centre del quadrat $ABCD$ i del rectangle $AECF$.
Notem que les dues circumferències circumscrites són la mateixa ja que totes dues passen per A i C.

Per ser angles inscrits i abraçar el mateix arc:
$\angle AEB = \angle ADB = 45°$