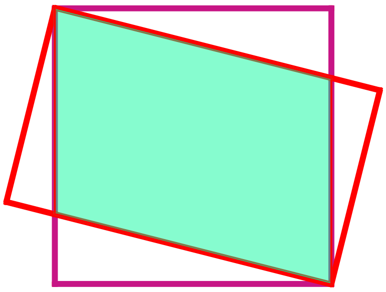
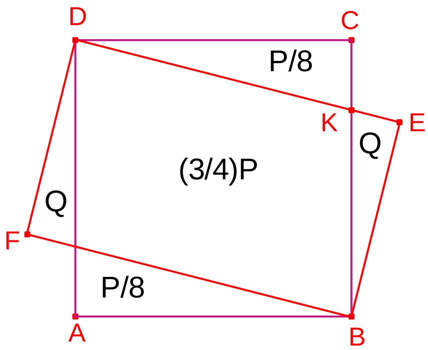
2661.- El 75% del quadrat lila està ombrejat.
Quina proporció del rectangle roig està ombrejada.



Solució
Siga P l'àrea del quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCK}$ és:
$$S_{DCK} = \frac{1}{8}P$$
Aleshores,
$$\overline{CK} = \frac{1}{4}c$$
$$\overline{BK} = \frac{3}{4}c$$

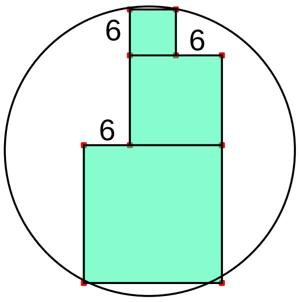


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCK}, \overset{\Delta}{BEK}$ són semblants.
Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEK}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{Q}{\frac{1}{8}P} = \frac{\overline{BK}^2}{\overline{DK}^2} = \left(\frac{\frac{3}{4}c}{\frac{\sqrt{17}}{4}c}\right)^2 = \frac{9}{17}$$

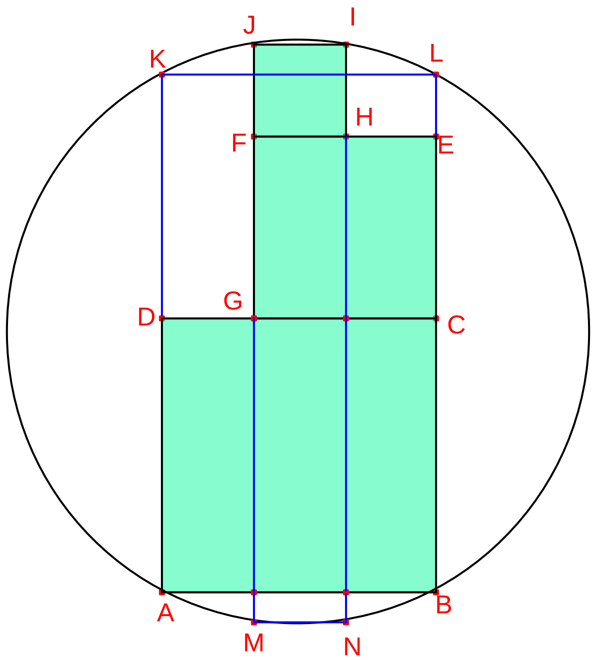
$$Q = \frac{1}{8}\frac{9}{17}P$$
L'àrea del rectangle BDEF és:
$$S_{BEDF} = \frac{3}{4}P + 2Q = \frac{3}{4}P + \frac{9}{68}P = \frac{15}{17}P$$

La proporció entes les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{BEDF}} = \frac{\frac{3}{4}P}{\frac{15}{17}P} = \frac{17}{20}$$

2662.- En la figura hi ha tres quadrats en l'interior d'un cercle.
Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 18$
Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CE} = 12$
Siga el quadrat $FHIJ$ de costat $\overline{FH} = 6$

La recta BC talla la circumferència en el punt L
La recta AD talla la circumferència en el punt K

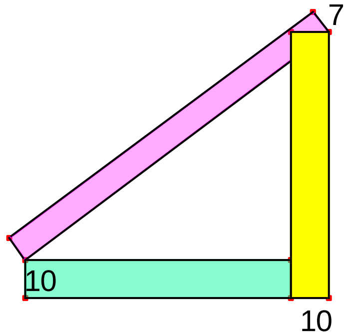
La recta JG talla la circumferència en el punt M
La recta IH talla la circumferència en el punt N

$\overline{JN} = \overline{AL} = 2r$ ja que són diàmetres de la circumferència.
Siga $\overline{EL} = a$
$\overline{JM} = 42 - a, \overline{BL} 30 + a$

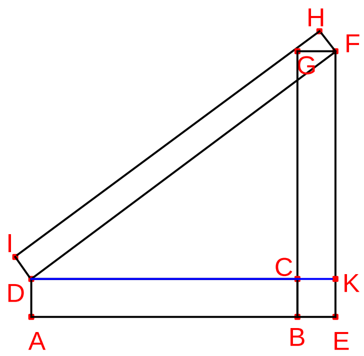
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABL}$:
$\overline{AL}^2 = 18^2 + (30 + a)^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JMN}$:
$\overline{JN}^2 = 6^2 + (42 - a)^2$
Igualant les expressions:
$18^2 + (30 + a)^2 = 6^2 + (42 - a)^2$
Simplificant:
$144a = 576$
Resolent l'equació:
$a = 4$
$r^2 = \dfrac{\overline{AL}^2}{4} = \dfrac{18^2 + 34^2}{4} = 370$
L'àrea del cercle és:
$S = 370\pi$

2663.- Els tres rectangles de la figura tenen la mateixa àrea.
Coneguem 3 costats dels rectangles.
Calculeu l'àrea de cada rectangle.



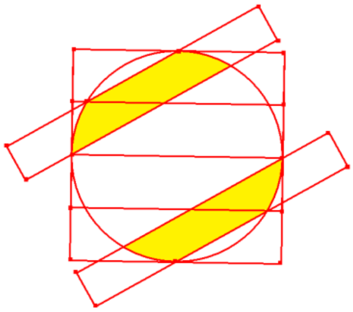
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AB} = a, \overline{AD} = 10$
Siga el rectangle $BEFG$, $\overline{BE} = 10, \overline{EF} = a$
Siga el rectangle $DFHI$, $\overline{DF} = b, \overline{FH} = 7$



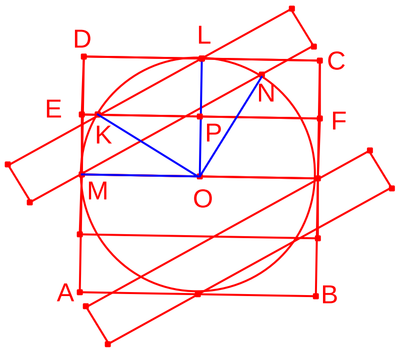
L'àrea del rectangles és igual:
$10a = 7b$
Aleshores:
$b = \frac{10}{7}a$

La recta DC talla el costat $\overline{EF}$ en el punt K.
Considerem el triangle rectangle $D\overset{\Delta}{K}F$.
$\overline{DK} = a + 10, \overline{KF} = a - 10$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\left(\frac{10}{7}a\right)^1 = (a + 10)^2 + (a - 10)^2$
Simplificant:
$a^2 = 4900$
Aleshores:
$a = 70$
L'àrea de cada rectangle és:
$S_{ABCd} = 10a = 10 \cdot 70 = 700$

2664.- Els sis rectangles de la figura tenen cadascun, àrea 3.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ circumscrit a la circumferència de centre O.
$\overline{AB} = 2r$ diàmetre de la circumferència.
Siga el rectangle $CDEF$ d'àrea 3.
$\overline{DE} = \frac{1}{2}r$
$S_{CDEF} = 2r \cdot \frac{1}{2}r = 3$
$r^2 = 3$
Siga la corda $\overline{KL}$
Siga P la projecció de L sobre el segment $\overline{EF}$
$\overline{OP} = \frac{1}{2}r, \overline{OK} = r$
Aleshores, $\angle KOL = 60°$
El triangle $\overset{\Delta}{KOL}$ és equilàter.

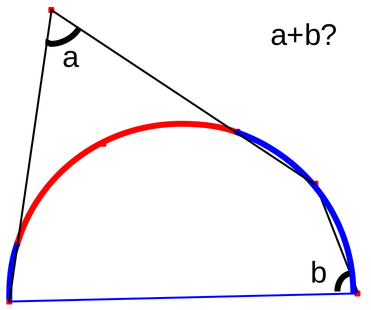


Siga la corda $\overline{MN}$ paral·lela a la corda $\overline{KL}$
$\angle NMO = 30°$
Aleshores:
$\angle MON = 120°$

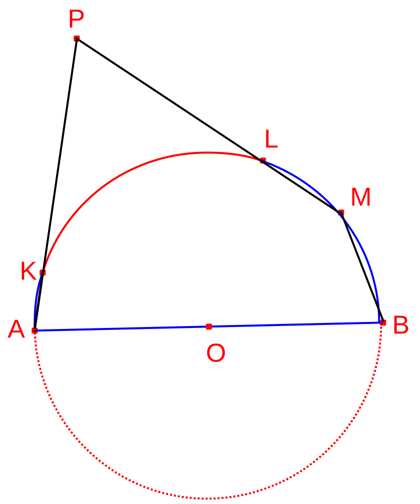
Els triangles $\overset{\Delta}{KOL}, \overset{\Delta}{MON}$ tenen la mateixa àrea.
L'àrea ombrejada és igual al doble de la diferència d'e dos sectors d'angles $120°$ i $60°$

$$S = 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{6}\pi r^2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 = \pi$$

2665.- L’arc roig de la semicircumferència és igual a la suma dels dos arcs blaus.
Determineu $a+b$



Solució:
Siga $a=\angle APM, b=\angle ABM$

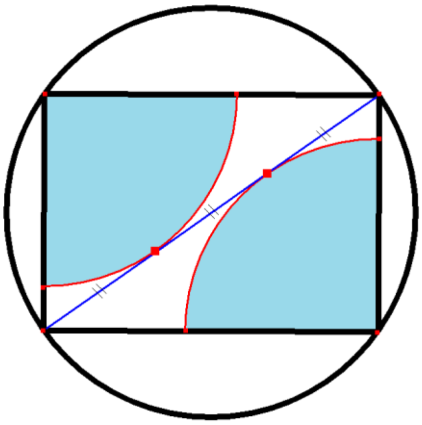


Siga $\widehat{AK}=2\beta, \widehat{KL}=2\gamma, \widehat{LM}=2\delta, \widehat{MB}=2\varepsilon$
$2\beta+2\gamma+2\delta+2\varepsilon=180°$
$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=90°$

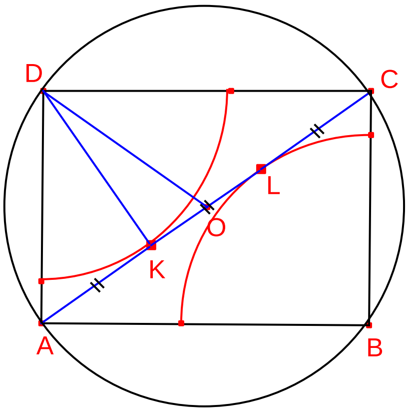
L’arc roig és igual a la suma dels arcs blaus.
$2\gamma=2\beta+2\delta+2\varepsilon$
$\gamma=\beta+\delta+\varepsilon$
$\gamma=90°-\gamma$
$2\gamma=90°$
L’angle $a=\angle APM$ és exterior. Mesura la semidiferència dels arcs que abraça
$$a=\frac{180°+2\varepsilon-2\gamma}{2}=\frac{90°+2\varepsilon}{2}=45°+\varepsilon$$

L’angle $b=\angle ABM$ és inscrit. Mesura la meitat de l’arc que abraça
$$b=\frac{180°-2\varepsilon}{2}=90°-\varepsilon$$
Aleshores:
$a+b=45°+\varepsilon+90°-\varepsilon=135°$

2666.- Els punts de tangència dels quadrants amb la diagonal del rectangle divideixen la diagonal en tres parts igual.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$ de centre O.
Siguen K, L els punts de tangència dels quadrants i la diagonal $\overline{AC}$
$\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LC} = a$
El radi de la circumferència exterior és:

$$R = \overline{OD} = \frac{1}{2}3a$$

Siga $\overline{DK} = r$, radi del quadrant.

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKO}$:

$$\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

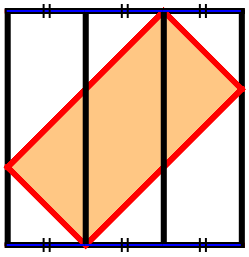
Simplificant:

$$r^2 = 2a^2$$

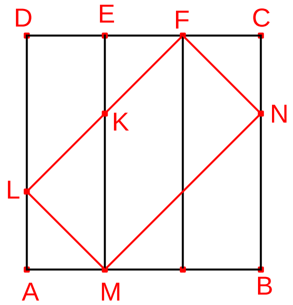
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2a^2}{\frac{9}{4}a^2} = \frac{4}{9}$$

2667.- Els costats oposat del quadrat, de la figura, s'han dividit en tres parts iguals.
Calculeu la proporció entre les àrees del rectangle ombrejat i del quadrat.

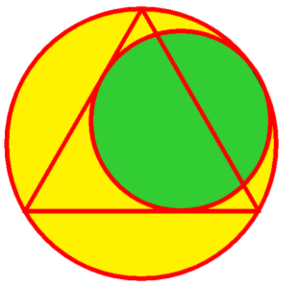


Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 3a$
$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC} = \overline{AM} = a$
Siga $\overline{EK} = b$
Aleshores:
$\overline{DL} = 2 \cdot \overline{EK} = 2b$
$\overline{AL} = \overline{EK} = b$
Aleshores:
$3a = 3b$
$a = b$



L'àrea del rectangle FLMN és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees de dos quadrats de costats 2a, a
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{FLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{9a^2 - (4a^2 + a^2)}{9a^2} = \frac{4}{9}$$

2668.- La figura conté un triangle equilàter inscrit en una circumferència i una circumferència verda tangent a l’anterior i tangent a dos costats del triangle equilàter. Calculeu la proporció entre les àrees ombrejades de verd i de groc.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ inscrit en la circumferència de centre O i radi $R = \overline{OA}$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = r$

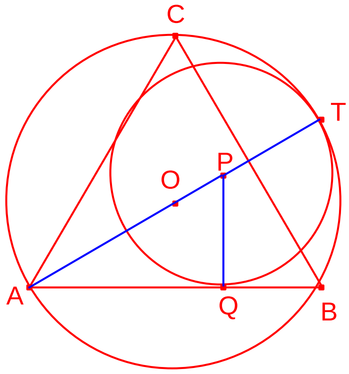
$\overline{AT}$ és bisectriu de l’angle $\angle BAC$

$\overline{AP} = 2R - r$

$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = \frac{1}{2}$

$\frac{r}{2R - r} = \frac{1}{2}$

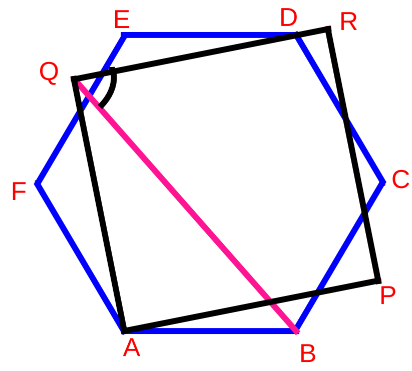
$r = \frac{2}{3}R$



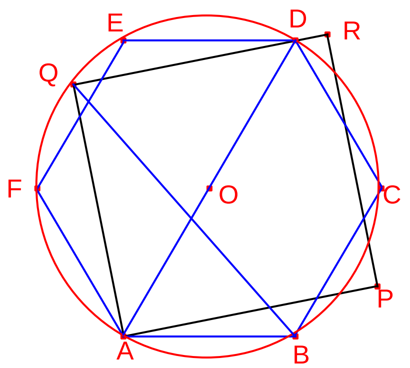
La proporció entre l’àrea verda i l’àrea groga és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{groga}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{\frac{4}{9}R^2}{\left(1 - \frac{4}{9}\right)R^2} = \frac{4}{5}$$

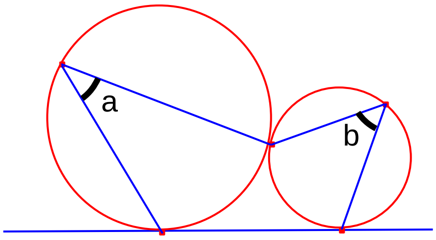
2669.- Donat l'hexàgon regular $ABCDEF$, s'ha dibuixat el quadrat $APRQ$.
Determineu l'angle $\angle BQR$



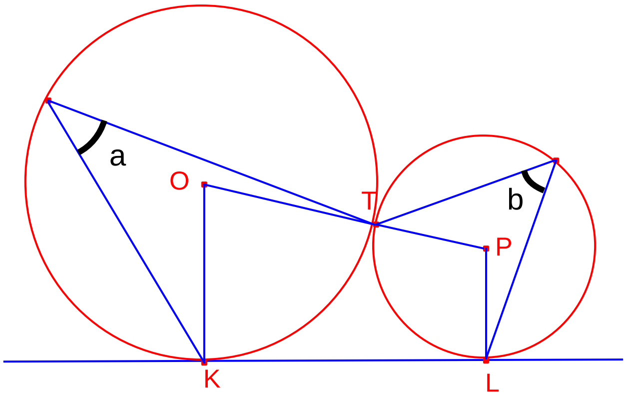
Solució:
$\angle AQD = \angle AED = 90°$
Aleshores, Q pertany a la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular.
$\angle BQR = 60°$



2670.- Dues circumferències tangents i tangents a una recta.
Calculeu $a + b$



Solució:



Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga K el punt de tangència de la circumferència de centre O.
Siga L el punt de tangència de la circumferència de centre P.

Per ser angles centrals.
$\angle KOT = 2a, \angle LPT = 2b$

Els punts O, T, P estan alineats.
Els radis $\overline{OK}, \overline{PL}$ són perpendiculars a la recta.
El quadrilàter $OKLP$ és un trapezi de costats paral·lels $\overline{OK}, \overline{PL}$
Aleshores, els angles $\angle KOT, \angle LPT$ són suplementaris.
$2a + 2b = 180°$
Aleshores:
$a + b = 90°$