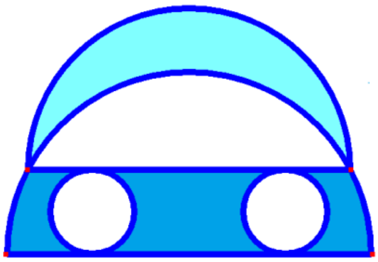
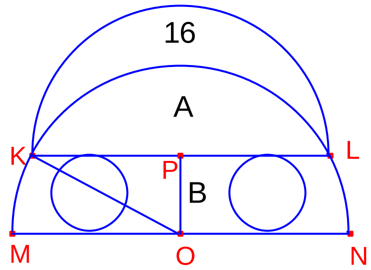
2671.- La regió pintada de verd (lúnula) és 16.
Calculeu l'àrea de la regió pintada de blau.



Solució:
Siga O el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{MN} = 2R$
Siga P el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{KL} = 2r$



Siga $16 + A$ l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{KL} = 2r$

$$16 + A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

Siga $\overline{OP} = 2t$ diàmetre de les dues circumferències.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPO}$

$$R^2 = r^2 + 4t^2$$

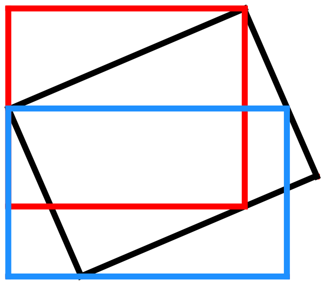
L'àrea pintada de blau és B.
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{MN} = 2R$ és $A + B + 2 \cdot \pi t^2$

$$\frac{1}{2}\pi R^2 = A + B + 2\pi t^2$$

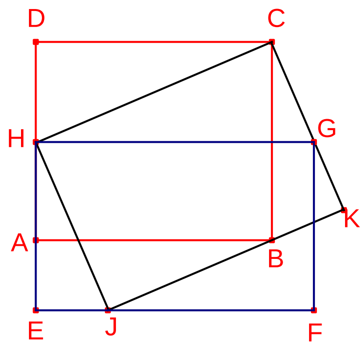
$$B = \frac{1}{2}\pi R^2 - A - 2\pi t^2$$

$$B = \frac{1}{2}\pi R^2 - \left(\frac{1}{2}\pi r^2 - 16\right) - \frac{1}{2}\pi(R^2 - r^2) = 16$$

2672.- Quin dels tres rectangles té major àrea?



Solució:
Siguen el rectangles $ABCD, EFGH, CHJK$.
Siga $\overline{AB} = a, \overline{EA} = b, \overline{AH} = c, \overline{HD} = c$
Siga $\overline{HG} = m, \overline{HJ} = n$



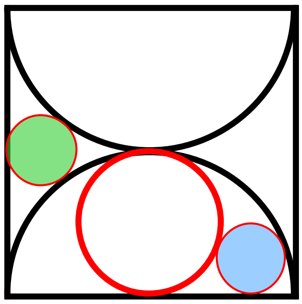
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HDC}, \overset{\Delta}{GCH}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\sqrt{a^2+d^2}}{a} = \frac{m}{\sqrt{a^2+d^2}}$$
$$m = \frac{a^2+d^2}{a}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HDC}, \overset{\Delta}{JEH}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b+c}{a} = \frac{n}{\sqrt{a^2+d^2}}$$
$$n = \frac{(b+c)\sqrt{a^2+d^2}}{a}$$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$$S_{EFGH} = (b+c)\frac{a^2+d^2}{a}$$
L'àrea del rectangle $CHJK$ és:
$$S_{CHJK} = \sqrt{a^2+d^2}\,\frac{(b+c)\sqrt{a^2+d^2}}{a} = (b+c)\frac{a^2+d^2}{a}$$

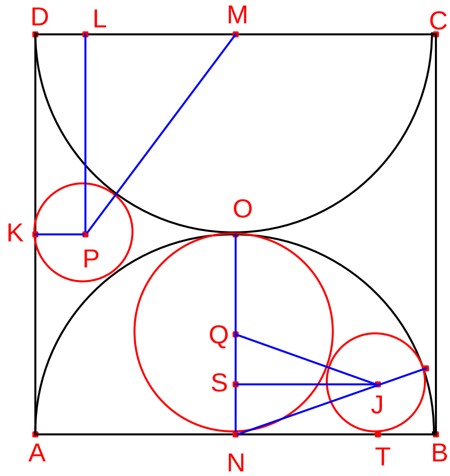
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HDC}, \overset{\Delta}{BKC}$ són semblants
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c+d}{\sqrt{a^2+d^2}} = \frac{n}{a}$$
$$c+d = \sqrt{a^2+d^2}\,\frac{(b+c)\sqrt{a^2+d^2}}{a^2} = \frac{(b+c)(a^2+d^2)}{a^2}$$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = (c+d)a = \frac{(b+c)(a^2+d^2)}{a^2}\cdot a = \frac{(b+c)(a^2+d^2)}{a}$$

Els tres rectangles tenen la mateixa àrea.

2673.- En la figura hi ha un quadrat dues semicircumferències i tres circumferències.
Calculeu la proporció entre les àrees dels cercles verd i blau.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2r$ de centre O.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{AB}$, respectivament.
M, N són els centres de les semicircumferències.
Siuga K el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Siga P el centre de la circumferència tangent al quadrat i a les dues semicircumferències.
Siga $\overline{PK} = s$ el radi.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLM}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$(r+s)^2 = r^2 + (r-s)^2$
Simplificant:
$s = \frac{1}{4}r$

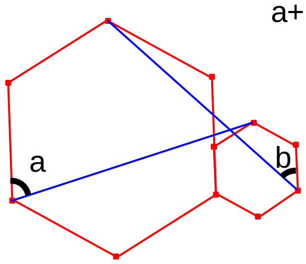
Siga Q el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{ON} = r$
Siga J el centre de la circumferència tangent al costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{JT} = t$ el radi de la circumferència.
Siga S la prpjecció de J sobre el segment $\overline{ON}$
$\overline{QJ} = \frac{1}{2}r + t, \overline{QS} = \frac{1}{2}r - t$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NSJ}$:
$\bar{SJ} = \sqrt{(r-t)^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - 2rt}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QSJ}$:
$\left(\frac{1}{2}r - t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r - t\right)^2 + r^2 - 2rt$
Simplificant:
$t = \frac{1}{4}r$
Les dues circumferències tenen el mateix radi.

2674.- Donats els dos hexàgons regulars de la figura, calculeu la suma dels angles $a + b$

a+b?

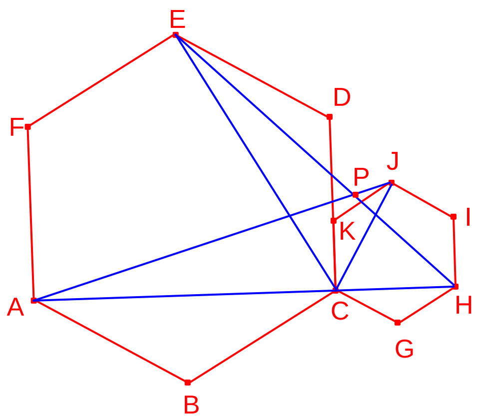


Solució:
Siguen els hexàgons regulars ABCDEF, CGHIJK, de costats $\overline{AB} = c, \overline{GH} = d$
$\overline{AC} = c\sqrt{3}, \overline{CJ} = d\sqrt{3}, \angle ACJ = 120°$
$\overline{CE} = c\sqrt{3}, \overline{CH} = d\sqrt{3}, \angle ECH = 120°$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ACJ}, \overset{\Delta}{ECH}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $\overline{AJ} = \overline{EC}$
El triangles $\overset{\Delta}{ACJ}$ és la transformació mitjançant un gir de centre C i angle $60°$ del triangle $\overset{\Delta}{ECH}$.

Siga P la intersecció dels segments $\overline{AJ}, \overline{EH}$
$\angle APH = 120°$

$\angle FAC = 90°, \angle CHI = 90°$

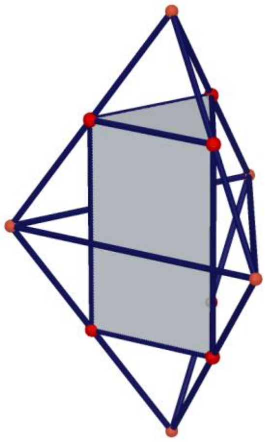
$\angle PAC = 90° - a, \angle CHP = 90° - b$



La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{APH}$ és 180º.
Aleshores:
$120° + 90° - a + 90° - b = 180°$

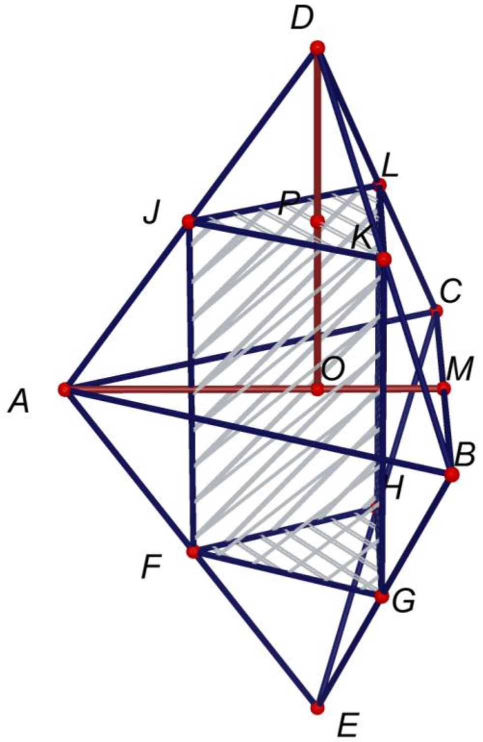
Aleshores, $a + b = 120°$

2675.- Dos tetràedres regulars estan units per una cara. Determineu la proporció dels volums del prisma de vèrtex els punts migs de les arestes dels tetràedres i la suma dels dos tetràedres.



Solució:
Siguen els tetràedres regulars $ABCD, ABCE$ d'aresta $\overline{AB} = a$

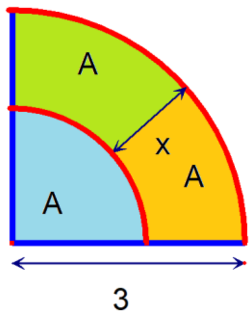
Siga O el centre de la base comuna $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{OD} = h$
Siga el prisma regular $FGHJKL$ d'aresta de la base $\overline{JK} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$



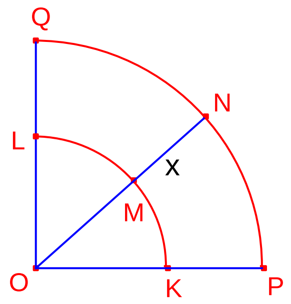
La recta OD talla la base del prisma $\overset{\Delta}{JKL}$ en el punt P.
Siga $\overline{OP} = x$
L'altura del prisma és $2x$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$
$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
Aplicant la propietat del baricentre:
$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$
$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \overline{OD}^2$$
$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$
$$\overline{OP} = x = \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_{KLM} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$
El volum de la suma dels dos tetràedres és:
$$V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$
El volum del prisma és:
$$V_{FGHJKL} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2 \cdot 2\frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{2}}{16}a^3$$
La proporció dels volums és:
$$\frac{V_{FGHJKL}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{16}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = \frac{3}{8}$$

2676.- Un quadrant de radi 3 s’ha dividit en tres parts iguals.
Determineu la distància entre els dos arcs.

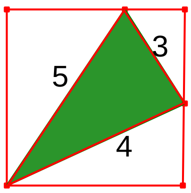


Solució:
Siga el quadrant $\widehat{PQ}$ de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{ON} = 3$
Siga el quadrant $\widehat{KL}$ de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OM} = r$
Siga $x = \overline{MN}$ distància entre els dos arcs.

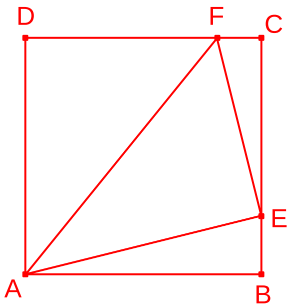


Els quadrant són semblants i la proporció de les àrees és igual al quadrat de la raó de semblança:
$\frac{A}{3A} = \left(\frac{r}{3}\right)^2$
Simplificant:
$r = \sqrt{3}$
$x = 3 - \sqrt{3}$

2677.- Un quadrat té inscrit un triangle de costats 3, 4, 5.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ de costats $\overline{EF} = 3, \overline{AE} = 4, \overline{AF} = 5$
El triangle és rectangle $E = 90°$
Siga $\overline{BE} = x, \overline{Ce} = c - x$

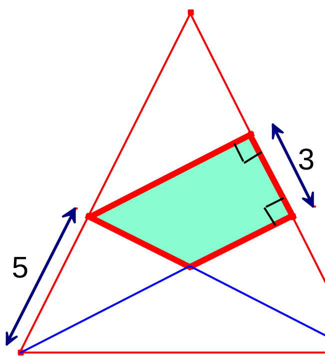


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{ECF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{c}{4} = \frac{c - x}{3}$
Simplificant:
$c = 4x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:
$4^2 = c^2 + x^2$
$16 = c^2 + \left(\frac{c}{4}\right)^2$
$c^2 = \frac{256}{17}$

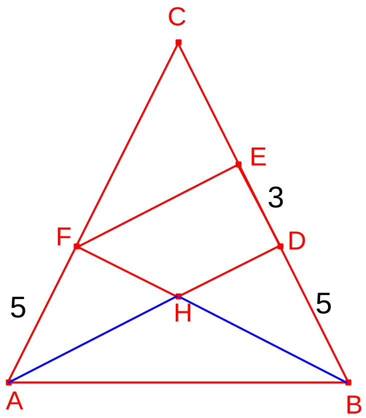
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = \frac{256}{17}$

2678.- En la figura, el triangle exterior és isòsceles.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$
Siga $\overline{AF} = 5, \overline{DE} = 3$
$\overline{BD} = \overline{AF} = 5$



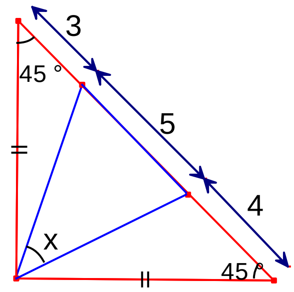
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BDH}, \overset{\Delta}{BEF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BH} = \overline{AH} = 5x, \overline{FH} = \overline{DH} = 3x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFH}$
$25x^2 = 9x^2 + 25$
$x = \frac{5}{4}$

$\overline{DH} = \frac{15}{4}$
$\overline{BF} = 8x = 10$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEF}$
$\overline{FE} = 6$

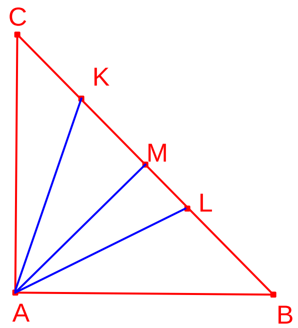
L'àrea del trapezi rectangle $DEFH$ és:
$$S_{DEFH} = \frac{6 + \frac{15}{4}}{2} 3 = \frac{117}{8}$$

2679.- El costat desigual del triangle isòsceles d'angles iguals de 45º s'ha dividit en tres segments de longituds 3, 5 i 4.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, B = C = 45°$
Siga $\overline{CK} = 3, \overline{KL} = 5, \overline{BL} = 4$
Aleshores, el triangle és rectangle $A = 90°$



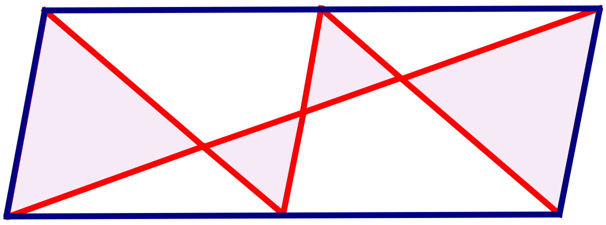
Siga M el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$.
$\overline{AM} = \overline{BM} = 6$
$\overline{KM} = 3, \overline{LM} = 2$
Siga $\alpha = \angle KAM,\ \beta = \angle MAL$
$x = \alpha + \beta$

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3}$$

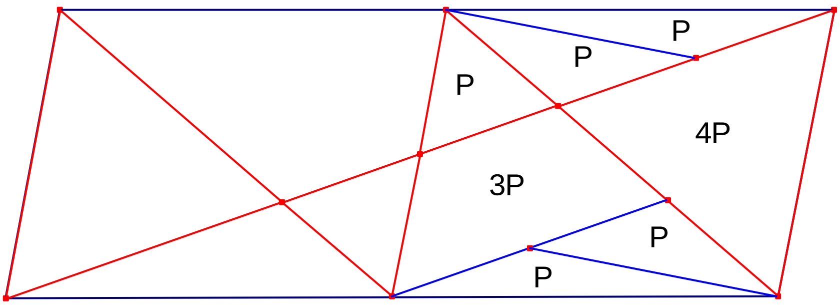
$$\tan x = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Aleshores, $x = 45°$

2680.- Quatre triangles equilàters en l'interior d'un paral·lelogram.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del paral·lelogram.



Solució:
El costat del triangle equilàter menut és la meitat que el costat del triangle gran.



La proporció és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{paral\cdot lelogram}} = \frac{5P}{12P} = \frac{5}{12}$$