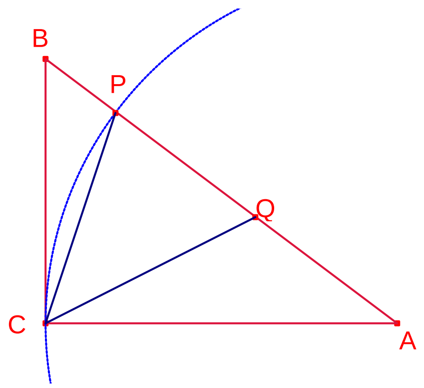
Problemes de Geometria per a l'ESO 27

261.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga P un punt sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC}=\overline{AP}$.

Siga Q sobre el segment $\overline{AP}$ tal que $\angle PCQ = 45^o$.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{CQB}$ és isòsceles.

Kömal Desembre 2010. K272.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{CAP}$ és isòsceles, Aleshores,

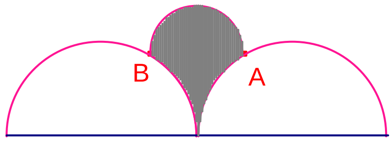
$\angle CPA = \angle PCA = 90^o - \dfrac{A}{2}$.

Com que $\angle PCQ = 45^o$, aleshores, $\angle CQP = 45^o + \dfrac{A}{2}$.

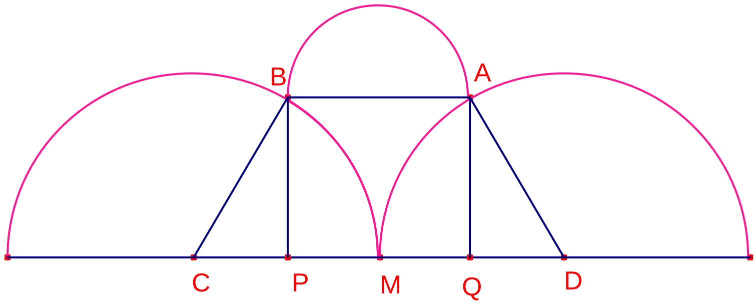
$\angle BCP = 90^o - \angle PCA = \dfrac{A}{2}$.

$\angle BCQ = 45^o + \dfrac{A}{2}$. Aleshores, $\angle CQB = \angle BCQ$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{CQB}$ és isòsceles.

262.- Tenim tres semicercles situats tal com mostra la figura.
El diàmetre $\overline{AB}$ del semicercle superior és paral·lel als diàmetres dels dos semicercles inferiors.
Si el radi d'aquests semicercles inferiors és 2cm i $\overline{AB} = 2\text{cm}$, quina és en cm^2 l'àrea de la regió ombrejada?.
Proves Cangur 2010, nivell 4, problema 14.



Solució:



Siguen C i D els centres dels semicercles inferiors.
$\overline{CD} = 4$, $\overline{BC} = \overline{AD} = 2$.
ABCD és un trapezi isòsceles.
Siga P la projecció de B sobre $\overline{CD}$, Q la projecció de A sobre $\overline{CD}$.
Aleshores, $\overline{CP} = \overline{DQ} = 1$.
Aleshores, $\angle BCP = \angle ADQ = 60^o$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$\overline{BP} = \overline{AQ} = \sqrt{3}$.
L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{4+2}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

L'àrea del sector de centre C i arc BM és la sisena part de l'àrea del cercle de radi 2:

$$S_{sector} = \frac{1}{6}\pi 2^2 = \frac{2}{3}\pi.$$

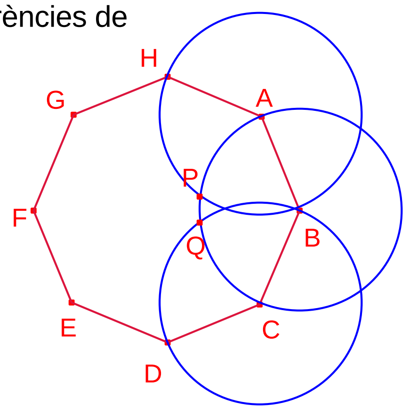
L'àrea ombrejada està formada per un semicercle de radi 1 més l'àrea del trapezi ABCD menys 2 sectors de centre C i arc BM.

$$S_{omb} = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + 3\sqrt{3} - 2\cdot\frac{2}{3}\pi = 3\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi.$$

263.- En la figura adjunta, ABCDEFGH és un octògon regular de costat 1. P i Q són les interseccions, interiors a l'octògon de les circumferències de centres A, B, C i radis 1.

Calculeu la mesura de l'angle $\angle APQ$.

Proves cangur 2010, nivell 4, problema 25.



Solució:

Considerem el pentàgon ABCQP:

$\angle ABC = 135^o$ angle interior d'un octògon regular.

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{BQC}$ són equilàters de costat 1.

Aleshores, $\angle PAB = 60^o$, $\angle QCB = 60^o$.

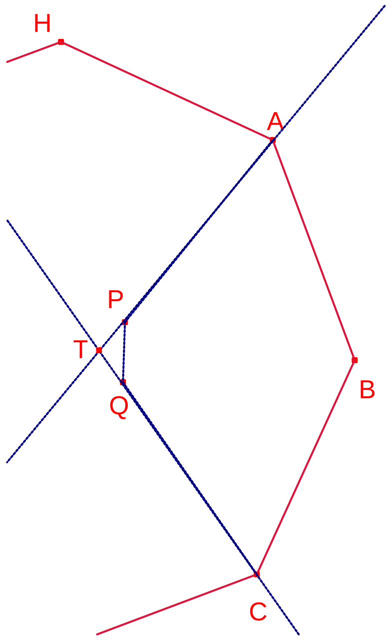
Les rectes AP CQ és tallen en el punt T.

Notem que $\overline{PT} = \overline{QT}$.

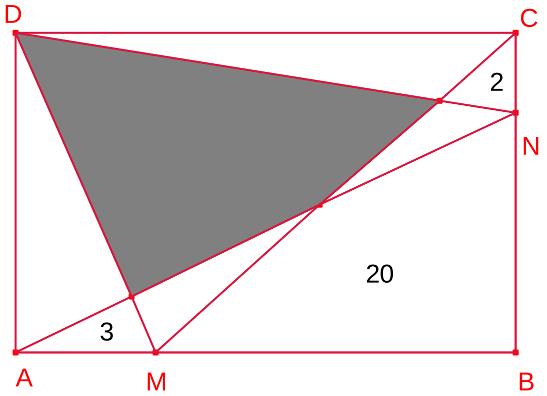
$\angle PTQ = 360^o - (\angle PAB + \angle QCB + \angle ABC) = 105^o$.

Aleshores, $\angle TPQ = \dfrac{180^o - 105^o}{2} = \dfrac{75^o}{2}$.

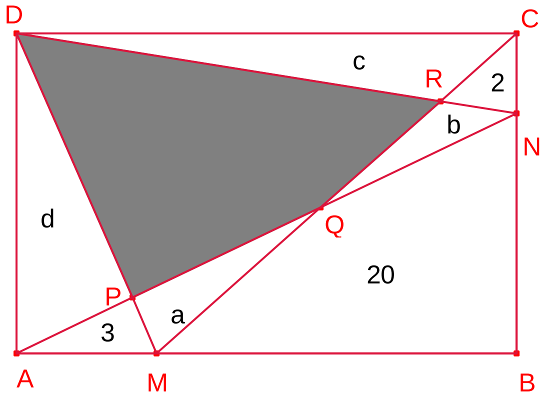
Aleshores, $\angle APQ = 180^o - \angle TPQ = 180^o - \dfrac{75^o}{2} = 142^o 30'$.



264.- En el rectangle ABCD de la figura hem dibuixat dos punts M, N en els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Hem dibuixat els segments que podeu veure a la figura de manera que el rectangle ha quedat dividit en 8 parts.
Hem mesurat les àrees de tres d'aquestes parts, que tenen els valors que podeu veure a la figura, 2, 3, i 20.
Quina és l'àrea del quadrilàter ombrejat.
Proves Cangur 2006, nivell 4, problema 26.



Solució:



Siga S l'àrea del rectangle ABCD.
Els 4 segments dibuixats determinen els punts P, Q, R.
Siga $a = S_{PMQ}$, $b = S_{QNR}$, $c = S_{CDR}$, $d = S_{APD}$.
Volem calcular l'àrea del quadrilàter DPQR.
Siga $x = S_{DPQR}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AND}$ és la meitat de l'àrea del rectangle ABCD:

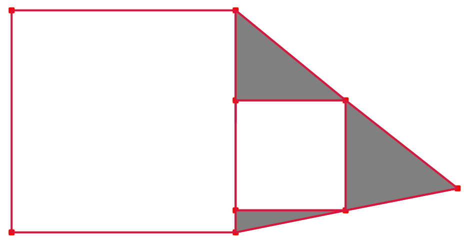
$$b + d + x = \frac{S}{2}.$$

La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AMD}$, $\overset{\Delta}{MBC}$ és la meitat del rectangle ABCD:

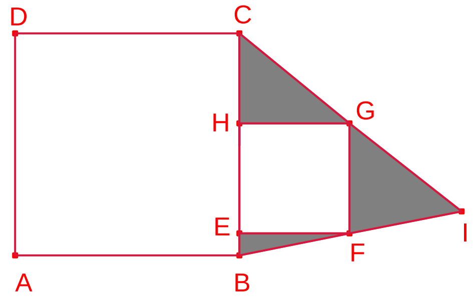
$$b + d + 25 = \frac{S}{2}.$$

Aleshores, $x = 25$.

265.- El dibuix mostra dos quadrats. La longitud del costat d'un és 2m, i l'altre, 1m.
Quina és la mesura de l'àrea ombrejada?
Proves Cangur 2003, nivell 4. Problema 18.



Solució:
Siguen ABCD, EFGH quadrats de costats $\overline{AB}=2$, $\overline{EF}=1$.
Siga I la intersecció de les rectes BF, CG.



Els triangles $\overset{\Delta}{BIC}$, $\overset{\Delta}{FIG}$ són semblants i la raó de semblança $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}}=\dfrac{2}{1}$.

Siga h l'altura del triangle $\overset{\Delta}{FIG}$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{BIC}$ és $h+\overline{EF}=1+h$.

Aplicant el teorema de tales als triangles $\overset{\Delta}{BIC}$, $\overset{\Delta}{FIG}$:
$\dfrac{1+h}{h}=2$. Resolent l'equació:
$h=1$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{BIC}$ és 2.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BIC}$ menys l'àrea del quadrat EFGH.

$$S_{ombra}=S_{BIC}-S_{EFGH}=\frac{1}{2}(2\cdot 2)-1^2=1m^2.$$

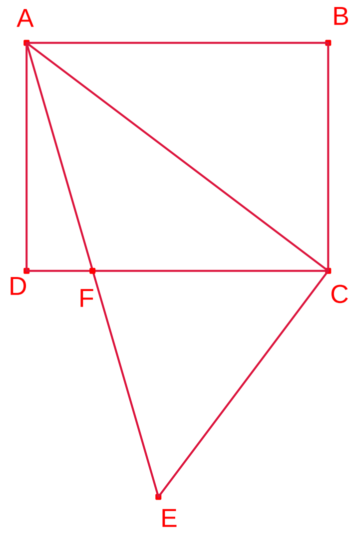
266.- En la figura, ABCD és un rectangle amb $\overline{AB} = 16\text{cm}$ i $\overline{BC} = 12\text{cm}$.

$\overset{\Delta}{ACE}$ és un triangle rectangle amb $\overline{AC} \perp \overline{CE}$ i $\overline{CE} = 15\text{cm}$.

Si F és el punt d'intersecció dels segments $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACF}$.

Proves Cangur 2003, nivell 4. Problema 27



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = 20$.

$\overline{CE} = 15$.

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}.$$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACE}$ són semblants.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}. \quad \overline{AE} = \frac{15}{12} \cdot 20 = 25.$$

$\angle EAC = \angle CAB = \angle DCA$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACF}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{CF}$.

$\angle FCE = 90º - \angle EAC = \angle AEC$.

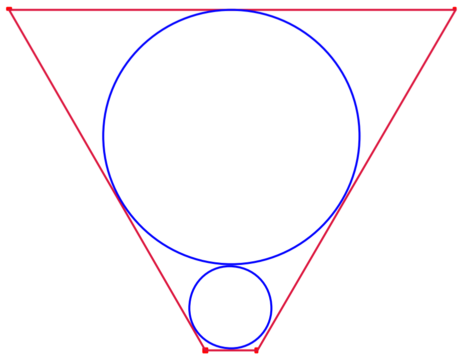
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CFE}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{FE}$.

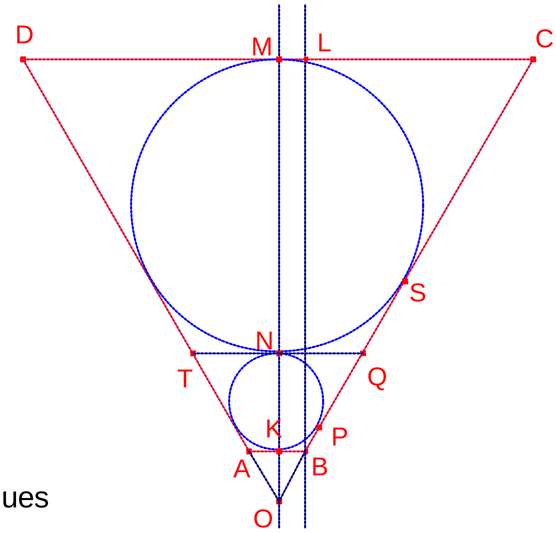
Aleshores, F és el punt mig de $\overline{AE}$.

$$\overline{FC} = \overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{25}{2}.$$

$$S_{ACF} = \frac{\overline{FC} \cdot \overline{BC}}{2} = 75\text{cm}^2.$$

267.- A l'interior d'un trapezi isòsceles de bases 9 cm i 1 cm, s'han inscrit dos cercles tangents, de manera que el radi del gros és el triple del radi del petit. Calculeu la mesura, dels costats iguals del trapezi i la seua àrea?





Solució:

Siguen ABCD els vèrtexs del trapezi.

Siguen $\overline{AB}=1$, $\overline{CD}=9$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga r el radi de la circumferència menuda.

El radi de la circumferència gran és 3r.

$\overline{MK}=8r$.

Siga L la projecció de B sobre el costat $\overline{CD}$.

$\overline{BL}=\overline{MK}=8r$. $\overline{CL}=\dfrac{9-1}{2}=4$

Siga $\overline{TQ}$ el segment tangent comú en el punt N a les dues circumferències.

Siga O la intersecció de les rectes BC, DA.

Els triangles $\overset{\Delta}{OCD}$, $\overset{\Delta}{OQT}$ són semblants i la raó de semblança és 3:1.

Aleshores, $\overline{TQ}=\dfrac{1}{3}\overline{CD}=3$.

Siga P el punt de tangència de la circumferència menuda i el costat $\overline{BC}$.

Siga S el punt de tangència de la circumferència gran i el costat $\overline{BC}$.

$\overline{BP}=\overline{BK}=\dfrac{1}{2}$.

$\overline{QP}=\overline{QN}=\overline{QS}=\dfrac{3}{2}$.

$\overline{CS}=\overline{CM}=\dfrac{9}{2}$.

Aleshores, $\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{BP}+\overline{QP}+\overline{QS}+\overline{CS}=8\text{ cm}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLC}$:

$(8r)^2+4^2=8^2$.

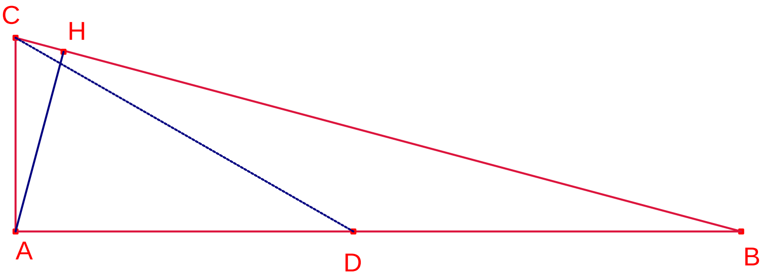
$8r=4\sqrt{3}$.

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{MK}=\frac{1+9}{2}4\sqrt{3}=20\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

268.- Els angles d'un triangle estan en proporció 1:5:6.
La longitud del costat més gran és 6cm.
Calculeu l'altura corresponent a aquest costat.
Proves Cangur 1999, nivell 4. Problema 27.

Solució:
Siguen α, 5α, 6α els angles d'un triangle que estan en proporció 1:5:6.
La suma dels angles d'un triangle és 180º, aleshores:
$\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 180^{o}$.
Resolent l'equació:
$\alpha = 15^{o}$.



Aleshores els angles del triangle són 15º, 75º, 90º.

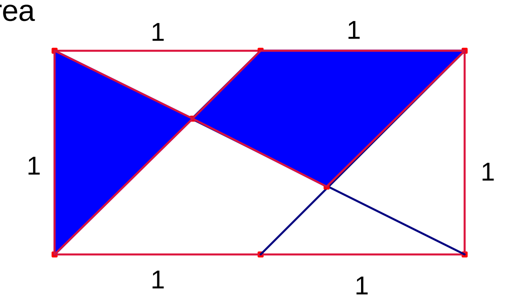
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $A = 90^{o}$, $B = 15^{o}$, $C = 75^{o}$
Siga $h = \overline{AH}$ l'altura sobre la hipotenusa.
Siga D un punt del catet $\overline{AB}$ tal que $\angle DCB = 15^{o}$.
Aleshores, $\angle ACB = 60^{o}$, $\angle ADC = 30^{o}$.
Siga $a = \overline{AC}$, aleshores, $\overline{CD} = 2a$, $\overline{AD} = a\sqrt{3}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{CDB}$ és isòsceles.
$\overline{BD} = \overline{CD} = 2a$.
Aleshores, $\overline{AB} = \left(2+\sqrt{3}\right)a$.

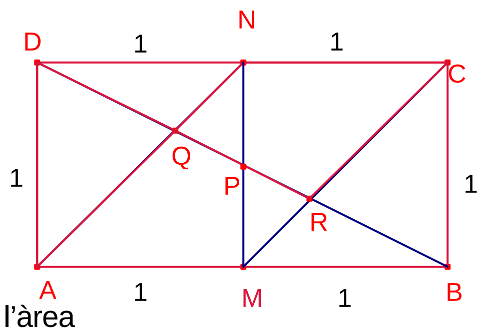
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$a^2 + \left(\left(2+\sqrt{3}\right)a\right)^2 = 6$.
$a^2 = 9\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$\frac{\overline{BC}\cdot h}{2} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}.$$
$\frac{6h}{2} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)a^2}{2}$. Resolent l'equació:
$h = \frac{3}{2}$.

269.- Quina és la proporció entre l'àrea acolorida i l'àrea total del rectangle.
Proves Cangur 1999 nivell 3, Problema 26



Solució:
Siga ABCD el rectangle la seua àrea és 2.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.
El segemnt $\overline{MN}$ talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt mig P dels dos segments.
Siga Q la intersecció del segment $\overline{AN}$ i la diagonal $\overline{BD}$.
Siga R la intersecció del segment $\overline{MC}$ i la diagonal $\overline{BD}$.
Notem que els quadrilàters AMPQ, CNPR són iguals.



L'àrea acolorida és igual a l'àrea del quadrat AMND menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DQN}$, $\overset{\Delta}{BQA}$ són semblants i la raó de semblança és 1:2
Aleshores, l'altura del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$ referida al vèrtex Q és la meitat de l'altura del triangle $\overset{\Delta}{BQA}$ referida al vèrtex Q.
Aleshores, l'altura del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$ és la tercera part del costat $\overline{AD} = 1$.
La superfície del triangle $\overset{\Delta}{DQN}$ és:

$$S_{DQN} = \frac{1}{6}.$$

Aleshores, la superfície de la zona acolorida és:

$$S_{Acolorida} = S_{AMND} - S_{DQN} = \frac{5}{6}.$$

La proporció entre l'àrea de la zona acolorida i l'àrea del rectangle ABCD és:

$$p = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}.$$

270.- Resoleu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts $a=1$, $b=2$, $C=60^o$.

Solució 1:

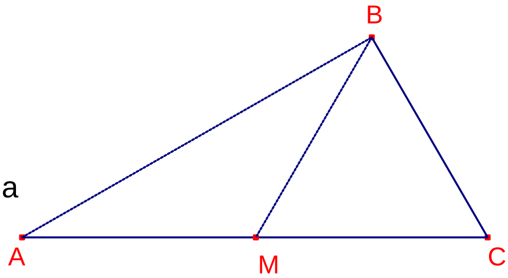
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}=2$.

$\overline{CM}=\overline{CB}=1$, $C=60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MCB}$ és equilàter.

Per tant, $\overline{BM}=1$.

En un triangle si la mitjana referida a un vèrtex mesura la meitat del costat oposat al vèrtex aleshores el triangle és rectangle en aquest vèrtex.



$\overline{CM}=\overline{CB}=\overline{BM}=1$, aleshores, $B=90^o$.

Aleshores, $A=30^o$, $\overline{AB}=\sqrt{3}$.

Solució 2:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}=2$.

$\overline{CM}=\overline{CB}=1$, $C=60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MCB}$ és equilàter.

Per tant, $\overline{BM}=1$, $\angle AMB=120^o$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és isòsceles, $\overline{AM}=\overline{BM}=1$.

Aleshores, $\angle MAB=\angle MBA=\dfrac{180^o-120^o}{2}=30^o$.

Aleshores, $B=90^o$, $A=30^o$, $\overline{AB}=\sqrt{3}$.

Solució 3:

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$c^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos 60^o$.

$c=\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^o}=\frac{2}{\sin B}.$$

Aleshores, $\sin B=1$, aleshores, $B=90^o$, $A=30^o$.