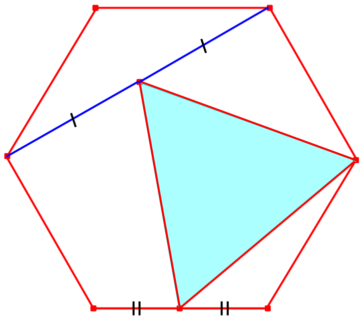
Problemes de Geometria per a l’ESO 270

2691.- Donat l’hexàgon regular, proveu que el triangle ombrejat és equilàter.



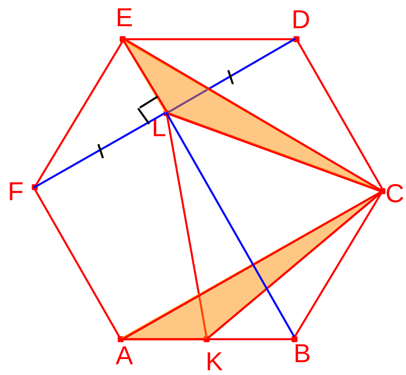
Solució:

Siga l’hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = c$

$\overline{AK} = \frac{1}{2}c, \overline{EL} = \frac{1}{2}c$

$\angle KAC = \angle LEC = 30°$

$\overline{AC} = \overline{EC}$



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KAC}, \overset{\Delta}{LEC}$ són iguals (CAC)

Per tant, $\overline{KC} = \overline{LC}$

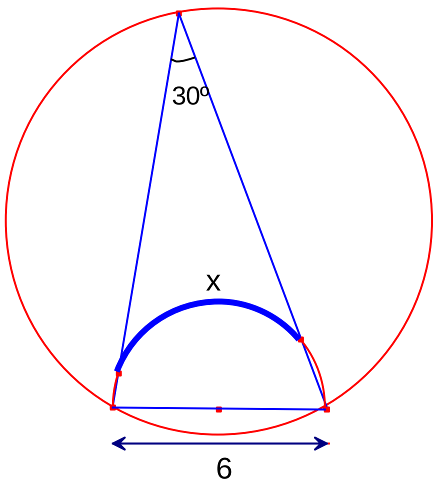
$\angle ACE = 60°$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{LEC}$ es transforma en el triangle $\overset{\Delta}{KAC}$ mitjançant un gir de centre C i angle 60º

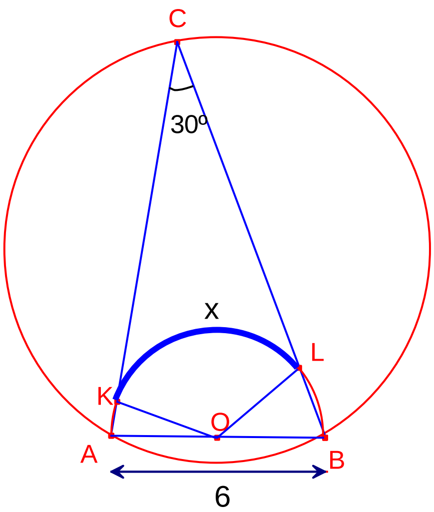
Aleshores, $\angle KCL = 60°$

Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{KCL}$ és equilàter

2692.- Calculeu la longitud de l’arc x de la semicircumferència.



Solució



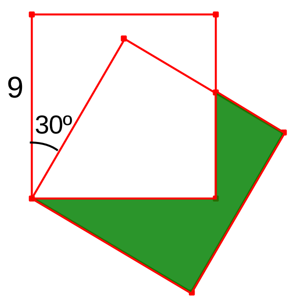
Siga $\overline{AB} = 6$ diàmetre de la semicircumferència de centre O.

Siga $\angle CAB = \alpha$
$\angle ABC = 150° - \alpha$

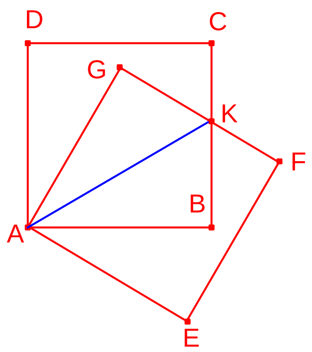
$\angle AOK = 180° - 2\alpha, \angle B = L = 180° - 2(150° - \alpha) = 2\alpha - 120°$
$\angle KOL = 180° - (180° - 2\alpha + 2\alpha - 120°) = 120°$

La longitud de l’arc de 120º i radi 3 és :
$x = \frac{1}{3} 2\pi \cdot 3 = 2\pi$

2693.- Els quadrats de la figura són iguals i de costat 9.
Dos costats del dos quadrats formen un angle de 30º.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siguen els quadrats iguals $ABCD, AEFG$ de costat $\overline{AB} = 9$
Siga K la intersecció dels dos quadrats.
$\angle GAK = \angle KAB = 30°$

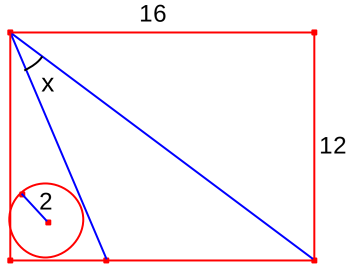


$$\overline{BK} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB} = 3\sqrt{3}$$

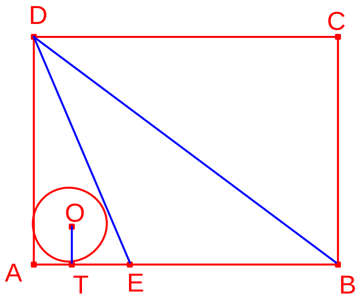
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat $AEFG$ menys el doble de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$S_{AEFKB} = 9^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\left(3 - \sqrt{3}\right)$$

2694.- En la figura, el rectangle té costats 12, 16.
El rectangle s'ha dividit en tres triangles.
La circumferència inscrita al triangle de l'esquerra mesura 2.
Calculeu $\tan x$.

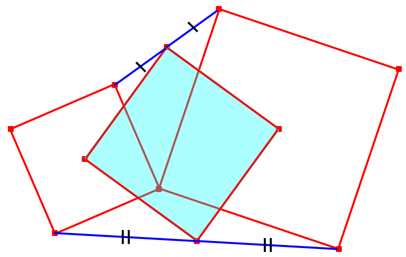


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 16, \overline{BCC} = 12$.
Siga $x = \angle EDB$
Siga $r = \overline{OT} = \overline{AT} = 2$ el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$.

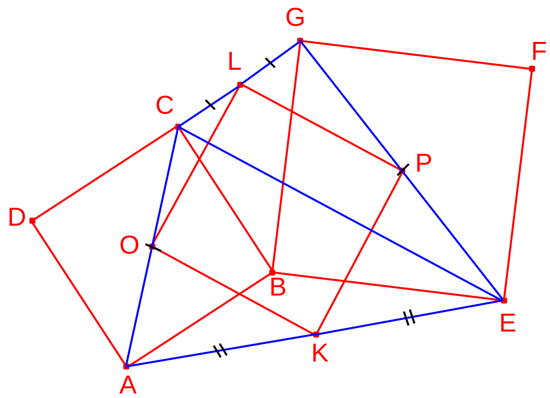


$$r = \frac{\overline{AD} + \overline{AE} - \overline{DE}}{2}$$
$$2 = \frac{12 + \overline{AE} - \overline{DE}}{2}$$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és:
$$S_{ADE} = r\frac{\overline{AD} + \overline{AE} - \overline{DE}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE}$$
$$12 + \overline{AE} - \overline{DE} = 6 \cdot \overline{AE}$$
Considerem el sistema:
$$\begin{cases} \overline{DE} - \overline{AE} = 6 \\ -\overline{DE} + 5 \cdot \overline{AE} = 12 \end{cases}$$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} \overline{AE} = 5 \\ \overline{DE} = 13 \end{cases}$$
Siga $\alpha = \angle ADE$
$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$
$$\tan(\alpha + x) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{\tan \alpha + \tan x}{1 - \tan \alpha \cdot \tan x}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{\frac{5}{12} + \tan x}{1 - \frac{5}{12}\tan x}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{5 + 12 \cdot \tan x}{12 - 5 \cdot \tan x}$$
$$56 \cdot \tan x = 33$$
$$\tan x = \frac{33}{56}$$

2695.- Donat dos quadrats, els quadrilàter format pels centres dels dos quadrats i pels punts migs dels segments assenyalats és un quadrat.

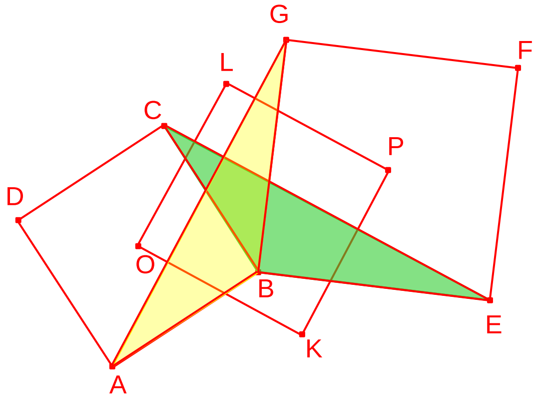


Solució:



Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$ de centre O, P, respectivament.
Siga K el punt mig del segment $\overline{AE}$
Siga L el punt mig del segment $\overline{CG}$

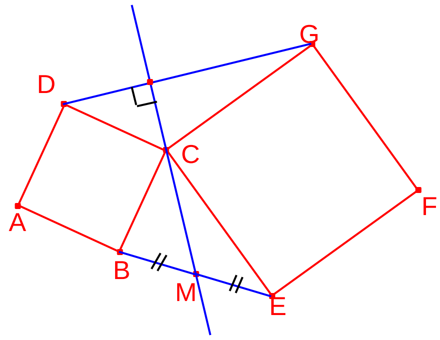
Considerem el quadrilàter $AEGC$.
K, P, L, O són els punts migs dels costats.
Aplicant el teorema de Varignon, $KPLO$ és un paral·lelogram.



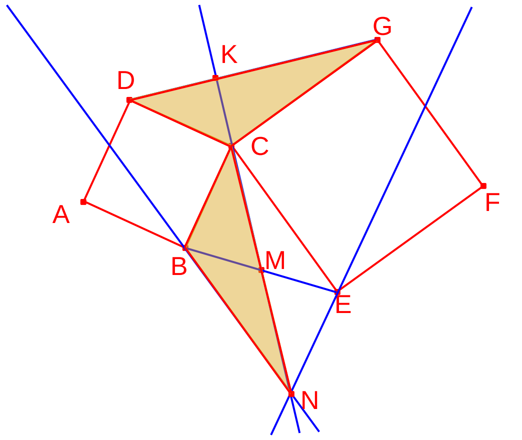
Els triangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{BGA}$ són iguals, (CAC)
Aleshores, $\overline{CE} = \overline{AG}$
Per tant, $\overline{OL} = \overline{PL}$.

El triangle $\overset{\Delta}{BGA}$ és transformat del triangle $\overset{\Delta}{BEC}$ mitjançant un gir de 90º de centre B.
Aleshores, $\overline{CE}, \overline{AG}$ són perpendicular.
Aleshores, $\overline{OL}, \overline{PL}$ són perpendiculars.
Aleshores, $KPLO$ és un quadrat.

2696.- Siguen els quadrats $ABCD, CEFG$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{BE}$.
Proveu que la recta MC és perpendicular al segment $\overline{DG}$.

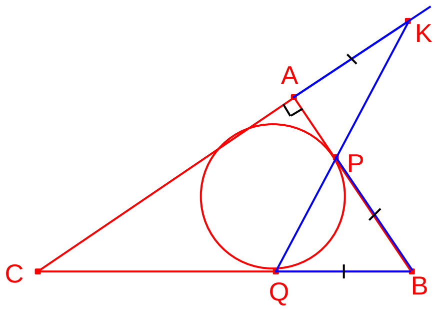


Solució:



Siga K el punt de tall de la recta MC i el segment $\overline{DG}$.
Construïm el paral·lelogram $BCEN$.
$\angle CBN = \angle DCG = 180° - \angle BCE$
Els triangles $\overset{\Delta}{CBN}, \overset{\Delta}{DCG}$ són iguals.
A més a més $\overline{CD}, \overline{CB}$ són perpendiculars, més $\overline{CG}, \overline{BN}$ són perpendiculars.
Aleshores, $\overline{CN}, \overline{DG}$ són perpendicular.

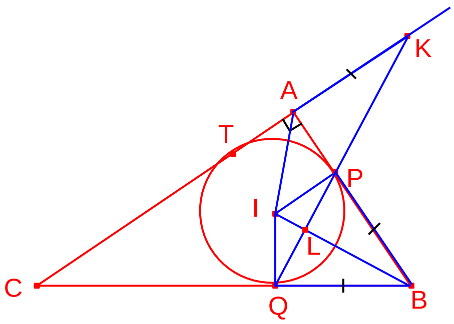
2697.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$.
Siguen P, Q punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle amb els costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivament.
La recta PQ talla la prolongació del catet $\overline{AC}$ en el punt K.
Proveu que $\overline{BP} = \overline{BQ} = \overline{AK}$



Solució:

Siga I l'incentre del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{IP} = \overline{IQ}$

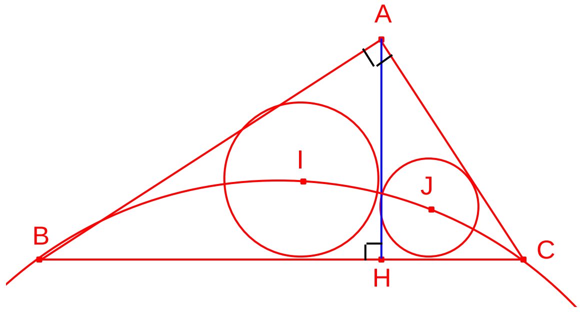
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BPI}, \overset{\Delta}{BPI}$ són iguals (ACA).
Aleshores:
$\overline{BP} = \overline{BQ}$



Siga L la intersecció dels segments $\overline{PQ}, \overline{BI}$
$\angle BPL = \angle BIP = \angle APK$
Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle amb el catet $\overline{AC}$
$\overline{IT} = \overline{IP} = \overline{AP}$

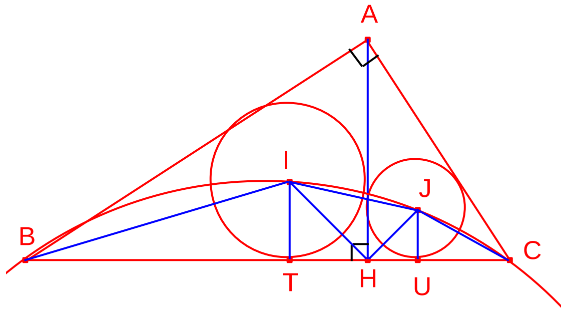
Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BPI}, \overset{\Delta}{KAP}$ són iguals (ACA).
Per tant:
$\overline{BP} = \overline{AK}$

2698.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$.
Siga $\overline{AH}$ altura sobre la hipotenusa.
Siguen I, J els incentres dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{BHA}, \overset{\Delta}{CHA}$, respectivament.
Proveu que els punts B, I, J, C pertanyen a una circumferència.



Solució:
Siguen $\overline{IT} = r, \overline{JU} = s$, radis de les circumferències inscrites als triangle rectangles $\overset{\Delta}{BHA}, \overset{\Delta}{CHA}$, respectivament.

$\angle BIH = \angle BIT + \angle TIH = 90° - \frac{B}{2} + 45°$



triangle rectangles $\overset{\Delta}{BHA}, \overset{\Delta}{CHA}, \overset{\Delta}{BAC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{s}{r} = \frac{b}{a}$

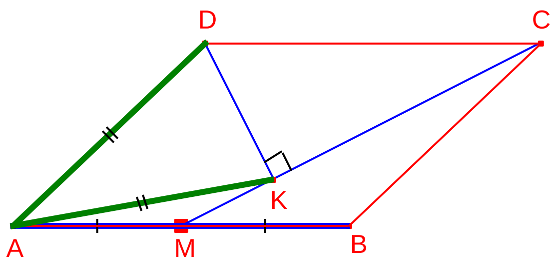
$\overline{HI} = r\sqrt{2}, \overline{HJ} = s\sqrt{2}$
$Ale3shores, \overset{\Delta}{IHJ}, \overset{\Delta}{BAC}$ són semblants.
Aleshores, $\angle HIJ = B$

$\angle BIJ = \angle BIH + \angle HIJ = 135° - \frac{B}{2} + B = 135° + \frac{B}{2}$

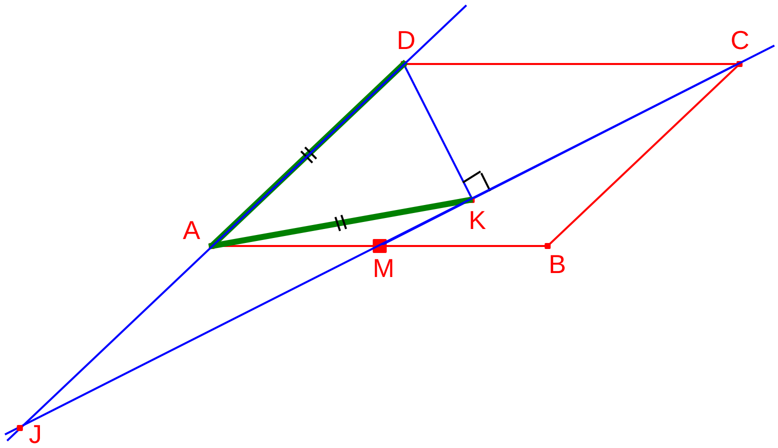
$\angle BCJ = \frac{C}{2}$

$\angle BIJ + \angle BCJ = 135° + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180°$
Aleshores, els angles del quadrilàter $BIJC$ són suplementaris.
Aleshores, aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter és inscrivible en una circumferència.

2699.- Siga el paral·lelogram ABCD.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga K la projecció del punt D sobre $\overline{CM}$
Proveu que $\overline{AK} = \overline{AD}$



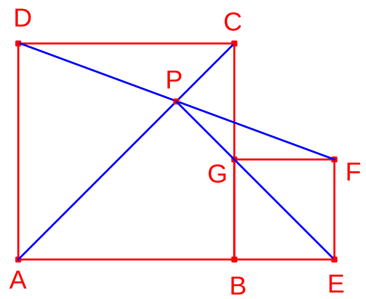
Solució:



Les rectes AB, CM és tallen en el punt J.
Els triangles $\overset{\Delta}{CDJ}, \overset{\Delta}{MAJ}$ són semblants i de raó 2:1
Aleshores:
$\overline{AJ} = \overline{AD}$

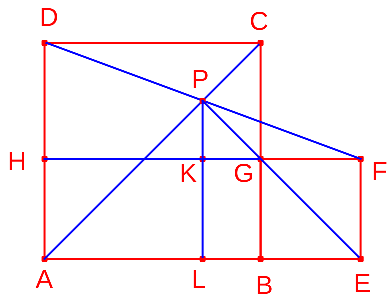
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{JKD}, K = 90°$
El punt A és el punt mig de la hipotenusa.
Aleshores:
$\overline{KA} = \frac{1}{2}\overline{JD} = \overline{AD}$

2700.- Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$.
Les rectes AC, EG es tallen en el punt P.
Proveu que els punts D, P, F estan alineats.



Solució:
Siguen $\overline{AB} = a, \overline{BE} = b$ costats dels quadrats.
El triangle $\overset{\Delta}{AEP}$ és isòsceles.

Siga L la projecció de P sobre $\overline{AB}$
Siga H la projecció de G sobre $\overline{AD}$
Siga K la projecció de G sobre $\overline{PL}$



$$\overline{KF} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2}(a+b)$$
$$\overline{PL} = \overline{KF} = \frac{1}{2}(a+b)$$
$$\overline{PK} = \frac{1}{2}(a+b) - b = \frac{1}{2}(a-b)$$
$$\frac{\overline{PK}}{\overline{KF}} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\overline{HF} = \overline{AE} = a+b$$
$$\overline{DH} = a-b$$

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{HF}} = \frac{a-b}{a+b}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DHF}, \overset{\Delta}{PKF}$ són semblants.
Aleshores, els punts D, P, F estan alineats.