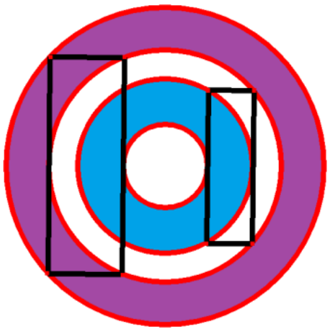
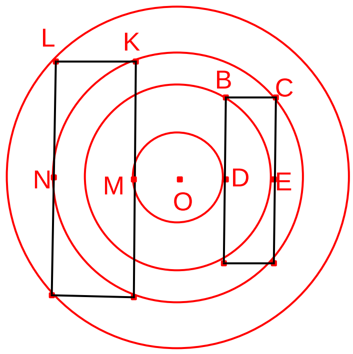
2701.- En la figura, cadascun dels rectangles és tangent a dos de les quatre circumferències concèntriques.
Si la corona circular blava té àrea 4, calculeu l'àrea de la corona circular lila.



Solució:
Siga $O$ el centre de les quatre circumferències.
Siga $\overline{OD} = \overline{OM} = r$
Siga $\overline{OE} = \overline{OB} = s$
Siga $\overline{ON} = \overline{OK} = \overline{OC} = t$
Siga $\overline{OL} = u$




La corona circular blava té àrea 4:
$\pi(s^2 - r^2) = 4$

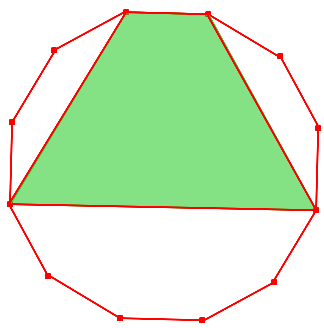
Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODB}$
$\overline{BD} = \sqrt{s^2 - r^2}$

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OEC}$
$t^2 = s^2 + s^2 - r^2$
$t^2 = 2s^2 - r^2$

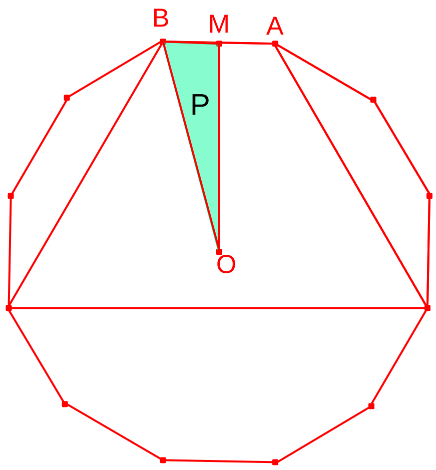
Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMK}$
$\overline{KM} = \sqrt{t^2 - r^2}$

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONL}$
$u^2 = t^2 + t^2 - r^2$
$u^2 = 2t^2 - r^2$
L'àrea de la corona circular lila és:
$S = \pi(u^2 - t^2) = \pi(2t^2 - r^2 - t^2) = \pi(t^2 - r^2) = 2\pi(s^2 - r^2) = 4$

2702.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del dodecàgon regular.

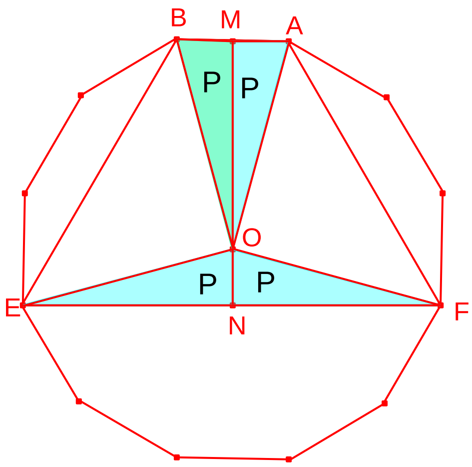


Solució 1:
Siga el dodecàgon regular de costat $\overline{AB}$ de centre $O$.
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $P$ l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$



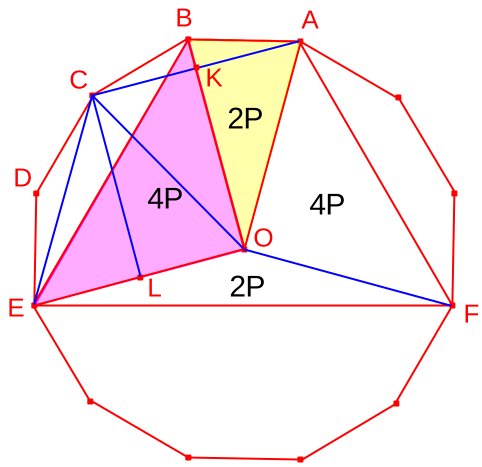

L'àrea del dodecàgon regular és:
$S_{12} = 24 \cdot P$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OMB}, \overset{\Delta}{OMA}, \overset{\Delta}{ONEB}, \overset{\Delta}{ONF}$ són iguals.

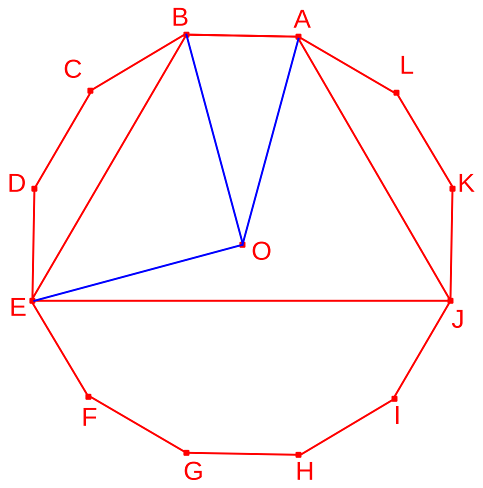



$S_{OAB} = 2 \cdot P$

Els triangles $\overset{\Delta}{OAC}, \overset{\Delta}{OBE}$ són equilàters.
Siga $K$ el punt mig de $\overline{AC}$
Siga $L$ el punt mig del $\overline{OE}$
$\angle BOE = 90°$
$\overline{OE} = 2 \cdot \overline{AK}$
Aleshores,
$S_{EOB} = 2 \cdot S_{OAB} = 4 \cdot P$
$S_{ABEF} = 12 \cdot P$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ABEF}}{S_{12}} = \frac{12 \cdot P}{24 \cdot P} = \frac{1}{2}$$



Solució 2:




Siga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJK$ de centre $O$.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència circumscrita.
$\angle AOB = 30°, \angle BOE = 90°$

L'àrea del dodecàgon és:

$$S_{12} = 12 \cdot S_{AOB} = 12 \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 30° = 3 \cdot R^2$$

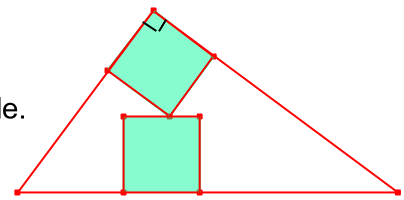
L'àrea del quadrilàter ombrejat $ABEJ$ és:

$$S_{ABEJ} = 2 \cdot S_{AOB} + 2 \cdot S_{BOE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \sin 30° + \frac{1}{2} R^2 = \frac{3}{2} R^2$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ABEJ}}{S_{12}} = \frac{\frac{3}{2} R^2}{3 \cdot R^2} = \frac{1}{2}$$

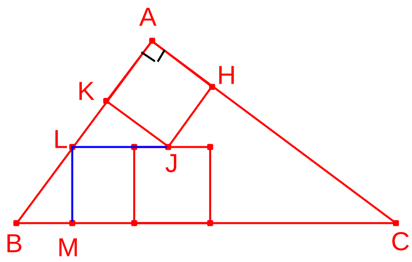
2703.- En la figura, els dos quadrats són iguals.
El perímetre d'un quadrat és la tercera part del perímetre del triangle rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el quadrat $AHJK$ de costat $\overline{AH} = x$
El perímetre del quadrat $ABCD$ és la tercera part del perímetre del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$4x = \frac{1}{3}(a + b + c)$$




Pel punt $J$ tracem una paral·lela a la hipotenusa $\overline{BC}$ que talla el cater $\overline{AB}$ en el punt $L$.
Siga $M$ la projecció de L sobre la hipotenusa $\overline{BC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{KL} = \frac{c}{b}x$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{MBL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{LB} = \frac{a}{b}x$$

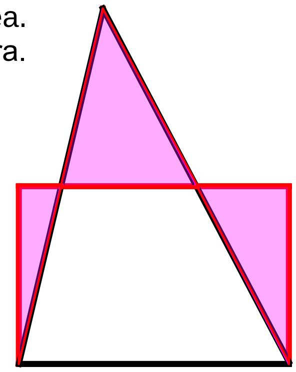
$$c = \frac{c}{b}x + \frac{a}{b}x + x = \frac{a + b + c}{b}x$$

$$bc = (a + b + c)x$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{2 \cdot S_{AHJK}}{S_{ABCC}} = \frac{2 \cdot x^2}{\frac{1}{2}bc} = \frac{2 \cdot x^2}{\frac{1}{2}(a + b + c)x} = \frac{2 \cdot x^2}{\frac{1}{2} \cdot 12x \cdot x} = \frac{1}{3}$$

2704.- En la figura el rectangle i el triangle tenen la mateixa àrea. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i el total de la figura.



Solució:

Siga el rectangle $ABCD$ i el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ d'igual àrea.

Siga $K$ el peu de l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$

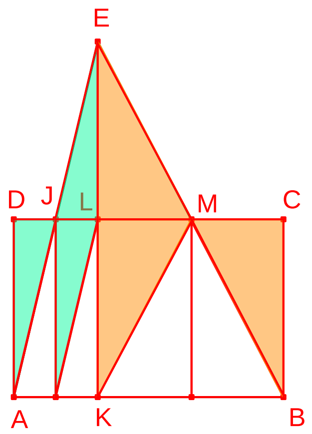
Per tindre la mateixa àrea:

$\overline{KE} = 2 \cdot \overline{AD}$

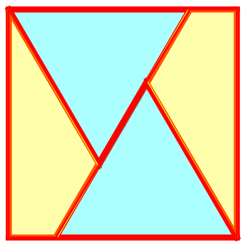
Dividim la figura en 10 triangles rectangles.

La proporció d'àrees és:

$$\frac{2(S_{JLE} + S_{LME})}{5(S_{JLE} + S_{LME})} = \frac{2}{5}$$

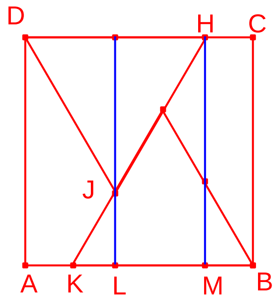


2705.- En la figura, dos triangles equilàters iguals estan a l'interior d'un quadrat.
Determineu la proporció entre les àrees pintades de blau i de groc.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DHJ}$ de costat $\overline{DH} = x$
Siga $K$ la projecció de $J$ sobre $\overline{AB}$
Siga $M$ la projecció de $H$ sobre $\overline{AB}$



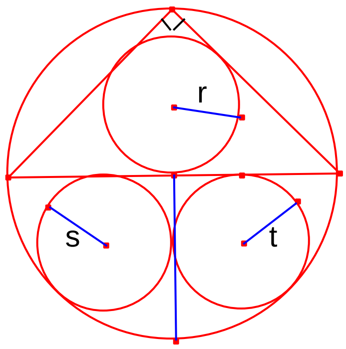

$\overline{AK} = c - x, \overline{AL} = \frac{1}{2}x$
Aleshores:
$\overline{KL} = \frac{3x - 2c}{2}, \overline{KJ} = 2 \cdot \overline{KL} = 3x - 2c$

$\overline{KH} = 4x - 2c, \overline{AM} = 2x - c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{KMH}$:
$(4x - 2x)^2 = (2x - c)^2 + c^2$
Simplificant:
$6x^2 - 6cx + c^2 = 0$
Resolent l'equació:
$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} c$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{2 \cdot S_{DHJ}}{S_{ABCD} - 2 \cdot S_{DHJ}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}c\right)^2}{c^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}c\right)^2} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{9 - 2\sqrt{3}} = \frac{13 + 8\sqrt{3}}{23}$$

2706.- En la figura hi ha 3 circumferències interior a una circumferència gran..
Una de radi r inscrita en el triangle rectangle de radi $r$.
Les altres tangents entre elles tangents a la circumferència exterior i a la hipotenusa del triangle rectangle. Els seus radis són $s, t$.
Calculeu $\frac{r}{s+t}$.

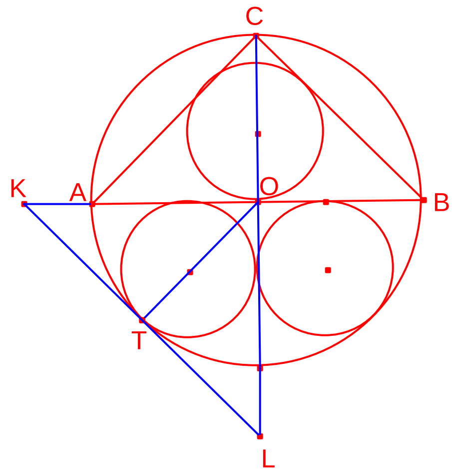



Solució:

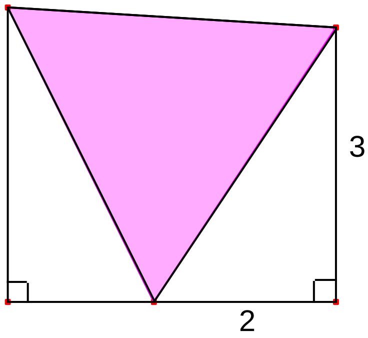
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$
$\overline{AB} = 2R$ és el diàmetre de la circumferència exterior.
Les circumferències de centres $s, t$ són iguals.
Siga $T$ el punt de tangència de la circumferència de radi $s$

La circumferència de radi $s$ és inscrita al triangle $\overset{\Delta}{OKL}$
$\overline{OT} = \overline{OA}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KOL}$ són iguals.
Aleshores:
$$\frac{r}{s+t} = \frac{1}{2}$$



2707.- En la figura quina superfície és més gran la del triangle equilàter ombrejat o la suma dels dos triangles rectangles.



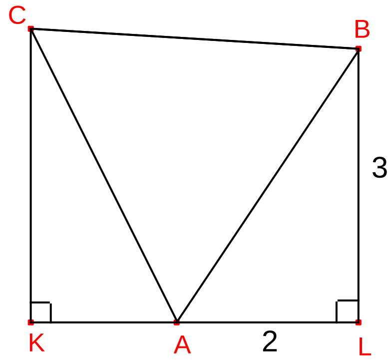

Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKA}, \overset{\Delta}{ALB}, \overline{AL} = 2, \overline{LB} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALB}$

$\overline{AB} = \sqrt{13}$




Siga $\overline{AK} = x, \overline{CK} = y, \angle LAB = \alpha$

$\angle KCA = \alpha - 30°$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKA}$:

$$\frac{x}{\sqrt{13}} = \sin(\alpha - 30°) = \frac{3\sqrt{13}}{13}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{13}}{13}\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$\frac{y}{\sqrt{13}} = \cos(\alpha - 30°) = \frac{2\sqrt{13}}{13}\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{13}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{13}\right)^2 = \frac{13\sqrt{3}}{4} \approx 5.63$$

L'àrea de la suma dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKA}, \overset{\Delta}{ALB}$ és:

$$S_{ALB} + S_{CKA} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{8} \approx 5.58$$

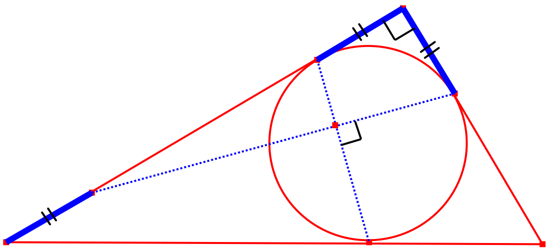
$36 + 5\sqrt{3} < 26\sqrt{3}$ ja que:

$36 < 21\sqrt{3}$ ja que

$12 < 7\sqrt{3}$

Ja que, $144 < 147$

2708.- Proveu que els segments interiors al triangle rectangle són perpendiculars.



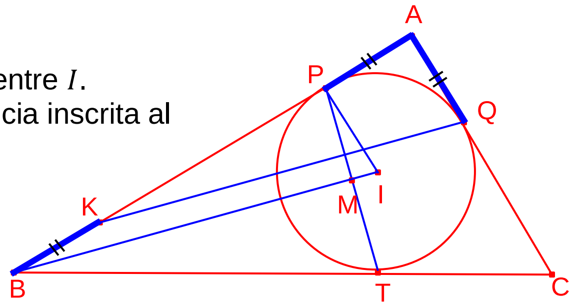
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Considerem la circumferència inscrita al triangle de centre $I$.

Sigue $P, Q, T$ els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle.

La mesura del radi és $\overline{AQ} = \overline{IQ} = \overline{AR} = \overline{IP} = r$




El triangle $\overset{\Delta}{BPT}$ és isòsceles $\overline{BT} = \overline{BP}$

$\overline{BI}$ és perpendicular a $\overline{PT}$.

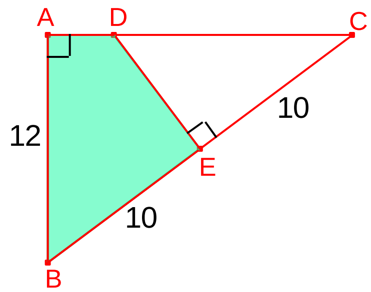
$\overline{BP} = \overline{KA} = c - r$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BIP}, \overset{\Delta}{KQA}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{BI}$ és paral·lel a $\overline{KQ}$.

Per tant, $\overline{KQ}$ és perpendicular a $\overline{PT}$.

2709.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga $\overline{AB} = 12$
Siga el punt mig $E$ de la hipotenusa $\overline{BC}$, $\overline{BE} = \overline{CE} = 10$
Siga el punt $D$ del catet $\overline{AC}$ tal que $\angle DEC = 90°$
Calculeu l'àrea del quadrilàter $ABED$.




Solució:

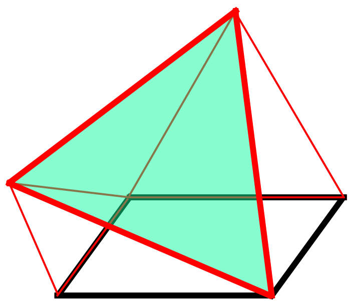
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 16$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EDC}$, són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{CD}}{20} = \frac{10}{16}$$
Aleshores:
$$\overline{CD} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{\overline{DE}}{12} = \frac{10}{16}$$
Aleshores:
$$\overline{DE} = \frac{15}{2}$$
L'àrea del quadrilàter $ABED$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EDC}$

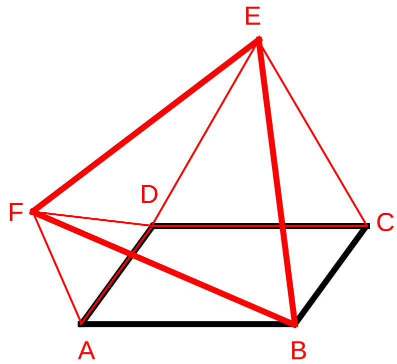
$$S_{ABED} = S_{ABC} - S_{EDC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot !0 \cdot \frac{15}{2} = \frac{117}{2}$$

2710.- Sobre l'exterior de dos costats adjacents d'un paral·lelogram s'ha dibuixat dos triangles equilàters. Proveu que el triangle ombrejat és equilàter.



Solució;

Siga el paral·lelogram ABCD $\angle DAB = \alpha$




$\overline{AF} = \overline{BC}, \overline{AB} = \overline{CE}, \angle FAB = \angle BCE = 60° + \alpha$

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{FAB}, \overset{\Delta}{BCE}$ són iguals (CAC)

Aleshores, $\overline{BF} = \overline{BE}$

$$\overline{AF} = \overline{DF}, \overline{AB} = \overline{DE}, \angle FDE = 360° - (120° + 180° - \alpha) = 60° + \alpha, \angle FAB = 60° + \alpha$$

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{FAB}, \overset{\Delta}{FDE}$ són iguals (CAC)

Aleshores, $\overline{BF} = \overline{EF}$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ és equilàter.