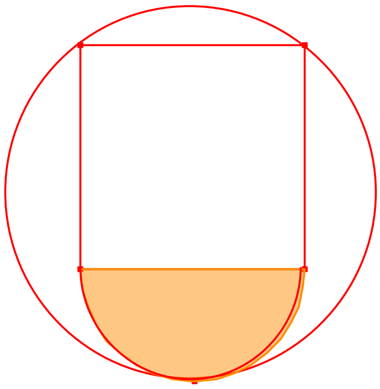
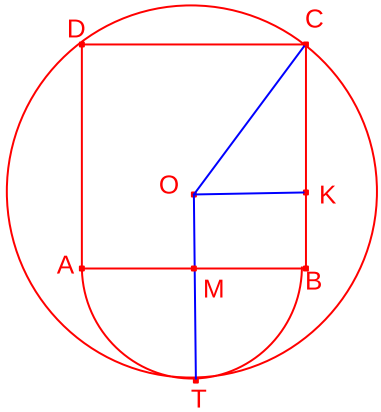
2711.- Un quadrat, una circumferència i una semicircumferència.
Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OC} = R$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga K la projecció de O sobre $\overline{BC}$.



El radi del semicercle és $\overline{MB} = \overline{MT} = \frac{1}{2}c$

$$\overline{OM} = R - \frac{1}{2}c$$

$$\overline{OM} = \overline{BK} = c - \left(R - \frac{1}{2}c\right) = \frac{3}{2}c - R$$

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKC}$:

$$R^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{9}{4}c^2 + R^2 - 3Rc$$

Simplificant:

$$c = \frac{6}{5}R$$

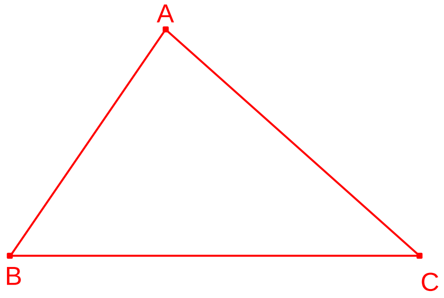
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{semicercle}}{S_{cercle}} = \frac{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{5}R\right)^2}{\pi R^2} = \frac{9}{50}$$

2712.- Calculeu l'àrea del triangle de costats $\sqrt{29}, \sqrt{20}, \sqrt{13}$

Solució 1:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a = \sqrt{29}, b = \sqrt{20}, c = \sqrt{13}$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$29 = 13 + 20 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\sin A = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

L'àrea del triangle és:

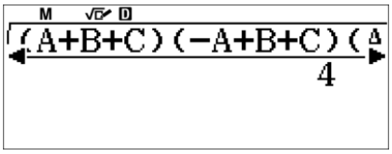
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \sin A = \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{8}{\sqrt{65}} = 8$$

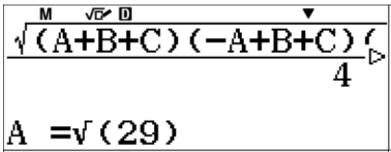
Solució 2:

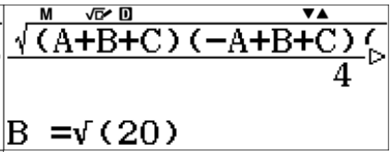
Aplicant la fórmula d'Heró:

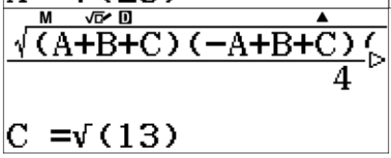
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

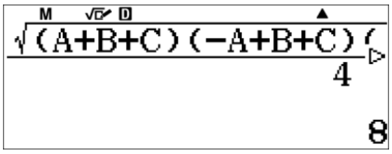
Ho farem amb la calculadora Casio Classwiz definint les variables costats.





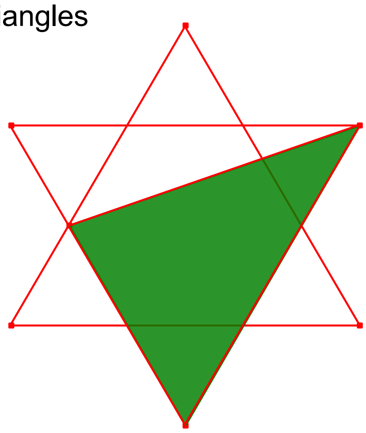






$S_{ABC} = 8$

2713.- Siga l'estrella regular de sis puntes formada per dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle ombrejat i l'estrella.



Solució 1:

$$S_{AKC} = \frac{1}{2} S_{AKCL} = 2 \cdot S_{LMN}$$

$$S_{ABK} = 4 \cdot S_{LMN}$$

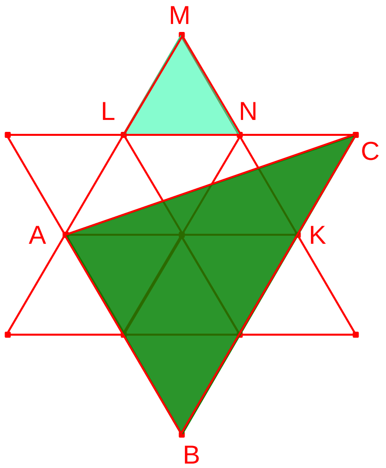
$$S_{ABC} = 6 \cdot S_{LMN}$$

L'àrea de l'estel.

$$S_{estel} = 12 \cdot S_{LMN}$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{estel}} = \frac{6 \cdot S_{LMN}}{12 \cdot S_{LMN}} = \frac{1}{2}$$



Solució 2:

Siga $\overline{AK} = c$

Siga $\overline{BK} = 3c$ costat del triangle equilàter.

$\overline{AB} = 2c, \overline{BC} = 3a, \angle ABC = 60°$

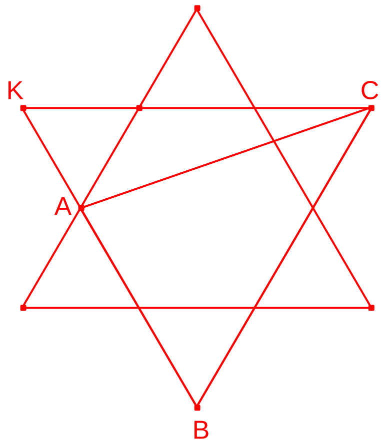
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 2c \cdot 3C \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2$$

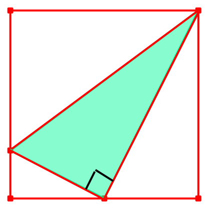
L'àrea de l'estrella és:

$$S_{estel} = 2 \cdot S_{BCK} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (3c)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{3} c^2$$

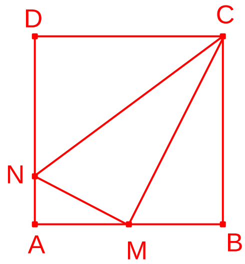
$$\frac{S_{ABC}}{S_{estel}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} c^2}{\frac{9\sqrt{3}}{2} c^2} = \frac{1}{2}$$



2714.- L'angle recte del triangle rectangle és el punt mig del costat del quadrat.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle i el quadrat.



Solució 1:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{NAM}$ són semblants i de raó $2:1$
Aleshores:

$$\overline{AN} = \frac{1}{4}c$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MCN}$ és i gual a l'àrea del quadrat $ABCD$ menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{NAM}, \overset{\Delta}{CDN}$:

$$S_{MCN} = c^2 - \left(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{3}{8}c^2\right) = \frac{5}{16}c^2$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{MCN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{16}c^2}{c^2} = \frac{5}{16}$$

Solució 2:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBC}$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{NAM}$ són semblants i de raó $2:1$
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{4}c$$

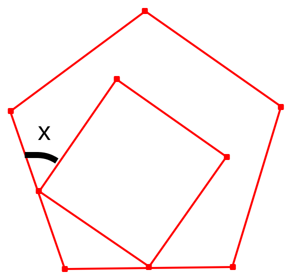
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MCN}$ és:

$$S_{MCN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}c \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}c = \frac{5}{16}c^2$$

La proporció de les àrees és:

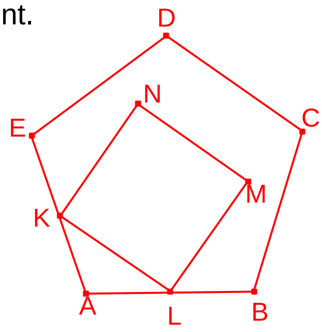
$$\frac{S_{MCN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{16}c^2}{c^2} = \frac{5}{16}$$

2715.- En la figura, dos vèrtexs del quadrat són els punts migs de dos costats consecutius del pentàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle x

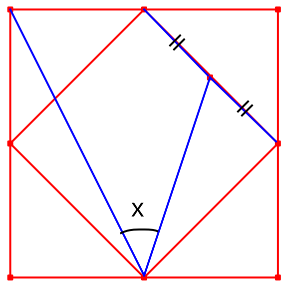


Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$.
Siguen K, L els punts migs dels costats $\overline{AE}, \overline{AB}$, respectivament.
$\angle EAB = 108°$ 8angle interior del pentàgon regular.
El triangle $\overset{\Delta}{KAL}$ és isòsceles.
$\angle AKL = 36°$

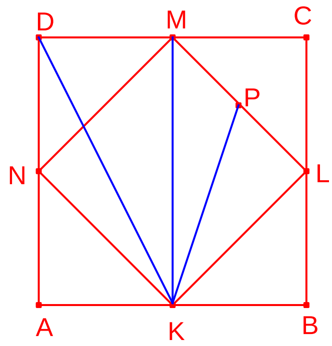
$x = \angle EKN = 180° - (36° + 90°) = 54°$



2716.- El quadrat inscrit té els vèrtexs en els punts migs dels costats del quadrat exterior.
Determineu la mesura de l'angle x.



Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$
Siga $KLMN$ el quadrat inscrit que té els vèrtexs en els punts migs dels costats del quadrat $ABCD$.
Siga P el punt mig del costat $\overline{LM}$



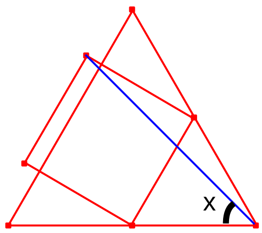
Siga $x = \angle DKP$

Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}K, K\overset{\Delta}{L}P$ són semblants
Aleshores,
$\angle DAK = \angle KLP$

$\angle DAK = \angle DKM$

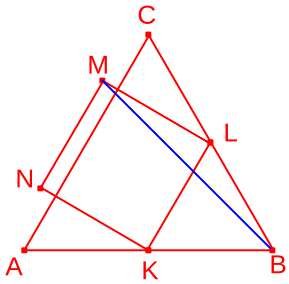
$\angle MKL = 45°$
Aleshores, $x = \angle DKP = 45°$

2717.- Amb els punts migs de dos costats del triangle equilàter, com vèrtexs consecutius, s'ha dibuixat un quadrat. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siguen K, L els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga el quadrat $KLMN$.

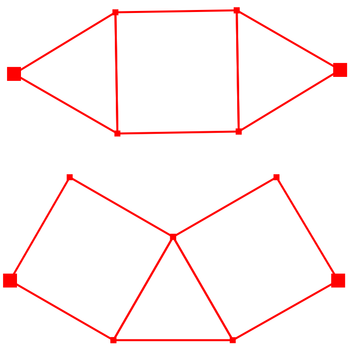


El triangle $\overset{\Delta}{KBL}$ és equilàter.
Aleshores, $\angle BLM = 60° + 90° = 150°$

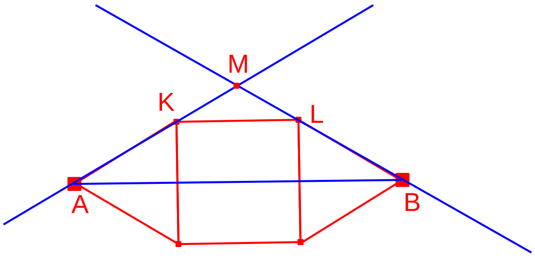
El triangle $\overset{\Delta}{BLM}$ és isòsceles, $\overline{BL} = \overline{LM}$.
Aleshores, $\angle LBM = 15°$

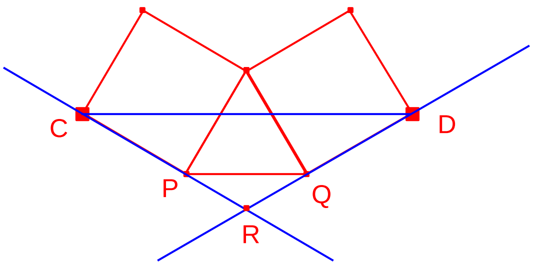
Per tant, $\angle KBM = 60° - 15° = 45°$

2718.- Els costats dels quadrats i els triangles equilàters de les dues figures són iguals.
Quina és la major distancia entre els dos punts remarcats de les dues figures?



Solució:





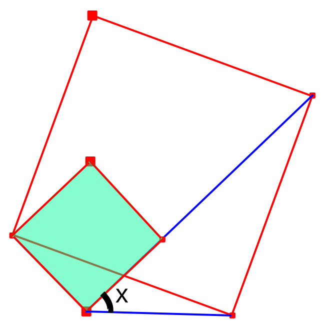
Siguen els punts A, B de la figura superior.
Les rectes AK, BL es tallen en el punt M.
$\angle MKL = \angle KLM = 30°$

Siguen els punts C, D de la figura inferior.
Les rectes CP, DQ es tallen en el punt R.
$\angle QPR = \angle PQR = 30°$

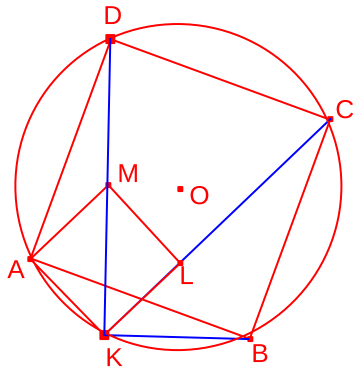
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KLM}, \overset{\Delta}{PQR}$ són iguals (ACA)

$\angle KML = \angle PRQ = 120°$, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CR} = \overline{DR}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{CDR}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{CD}$

2719.- En la figura, hi ha dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x
Proveu que els tres vèrtexs marcats estan alineats.



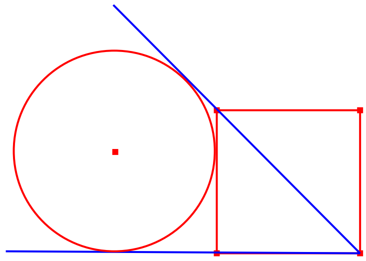
Solució:
Considerem el quadrat gran $ABCD$ de centre O.
Considerem el quadrat menut $AKLM$.
Considerem la circumferència circumscrita al quadrat $ABCD$.



El quadrilàter $AKCD$ té els angles oposats suplementaris.
Aleshores està circumscrit a una circumferència.
Està circumscrita a la circumferència circumscrita al quadrat $ABCD$.
L'angle $x = \angle CKB$ és inscrit a la circumferència i abraça un quadrant.
Aleshores, $x = \angle CKB = 45°$

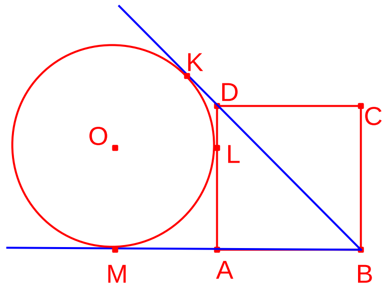
$\angle AKL = 45°$
L'angle $\angle AKD$ és inscrit a la circumferència i abraça un quadrant.
Aleshores, $\angle AKD = 45°$
Aleshores, A, L, D estan alineats.

2720.- La circumferència de radi 1 és tangent a la diagonal del quadrat i a dos costats del quadrat.



Calculeu l'àrea del quadrat.

Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen K, L, M els punts de tangència de la circumferència de centre O i radi
$\overline{OL} = \overline{OM} = \overline{OK} = 1$



$\overline{AM} = \overline{AL} = 1$
$\overline{DL} = \overline{DK} = c - 1$
$\overline{BK} = \overline{BM}$
$\overline{BK} = c\sqrt{2} + c - 1$
$\overline{BM} = 1 + c$
Aleshores:
$c\sqrt{2} + c - 1 = 1 + c$
Aleshores:
$c = \sqrt{2}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = 2$