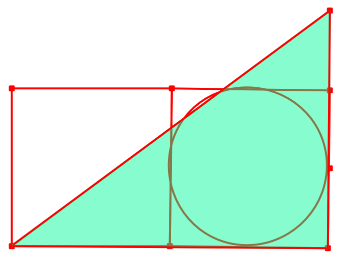
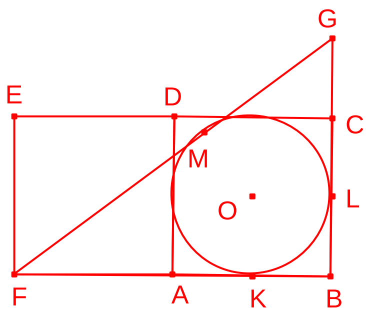
2721.- En la figura, la circumferència de radi 1 està inscrita en el quadrat.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejada que té els costats tangents a la circumferència.



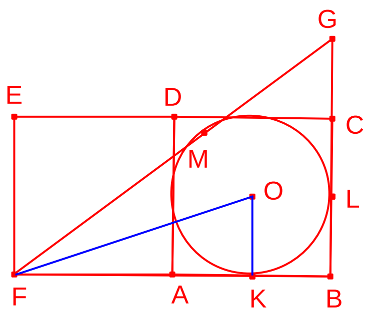
Solució: 1
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siguen K, L, M els punts de tangència de la circumferència de centre O i els costats del triangle rectangle $\overset{\Delta}{FBG}$.
$\overline{FK} = \overline{FM} = 3, \overline{BK} = \overline{BL} = 1$
Siga $\overline{GL} = \overline{GM} = a$
$\overline{FG} = 3 + a, \overline{FB} = 4, \overline{BG} = 1 + a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FBG}$:
$(a + 3)^2 = 4^2 + (1 + a)^2$
Simplificant:
$a = 2$
Aleshores,
$\overline{FG} = 5, \overline{FB} = 4, \overline{BG} = 3$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{FBG}$:
$$S_{FBG} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

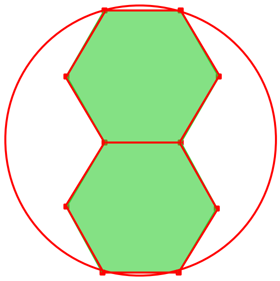
Solució 2:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siguen K, L, M els punts de tangència de la circumferència de centre O i els costats del triangle rectangle $\overset{\Delta}{FBG}$.

Siga $\alpha = \angle OFK, \overline{FK} = 3, \overline{OK} = 1$
$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$
Siga $\overline{BG} = b$
$\angle GFB = 2\alpha$
$$\frac{b}{4} = \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

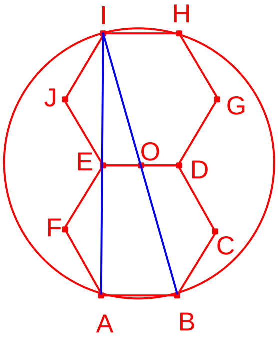


Resolent l'equació:
$b = 3$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{FBG}$:
$$S_{FBG} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

2722.- En una circumferència hi ha inscrits dos hexàgons regulars de costat 1.
Calculeu el radi de la circumferència.

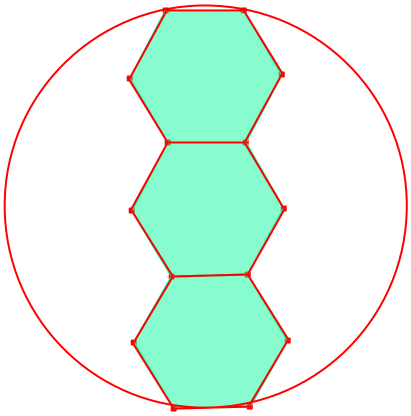


Solució:
Siguen els hexàgons regulars $ABCDEF, EDGHIJ$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre O, el punt mig del costat $\overline{DE}$, i diàmetre $\overline{BI} = 2R$
$\overline{AI} = 2\sqrt{3}$

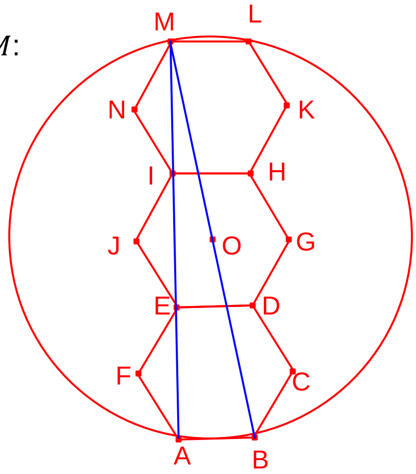


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABI}$:
$4R^2 = 1 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
Aleshores:
$$R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

2723.- Determineu la proporció entre les àrees de la suma dels tres hexàgons regulars i el cercle.



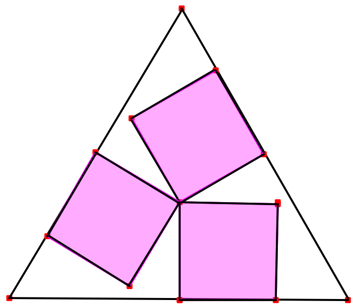
Solució:
Siguen els hexàgons regulars
$ABCDEF, EDGHIJ, IHKLMN$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre O, el punt mig de la diagonal $\overline{JG}$, i diàmetre $\overline{BM} = 2R$
$\overline{AM} = 3\sqrt{3}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:
$4R^2 = 1 + \left(3\sqrt{3}\right)^2$
Aleshores:
$R = \sqrt{7}$

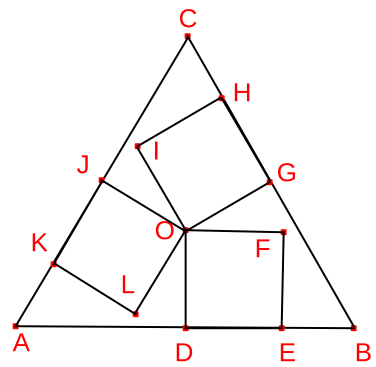
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_{3H}=3\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2}{\pi\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{9\sqrt{3}}{14\pi}$ ≈0.3544

2724.- Calculeu l'àrea del triangle equilàter exterior si els costats dels tres quadrats iguals són unitaris.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
El vèrtex comú dels tres quadrats és el centre del triangle equilàter ja que està a la mateixa distància dels tres costats.
Siguen els quadrat $ODEF, OGHI, OJKL$ de costats $\overline{DE} = 1$

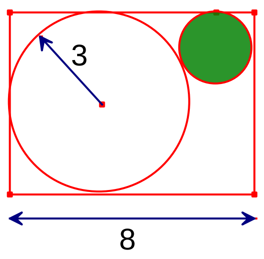


Aplicant el teorema de Viviani al punt O.
La suma de les distàncies de O als costats és igual a l'altura del triangle equilàter.
Aleshores:
$\overline{CD} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDB}$:
$c = \overline{BC} = 2\sqrt{3}$.

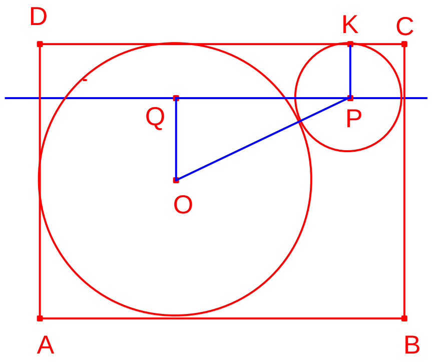
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$.

2725.- El costat gran del rectangle de la figura mesura 8. Calculeu el radi de la circumferència menuda sabent que el radi de la circumferència gran mesura 3.

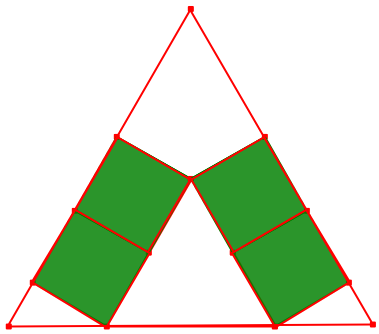


Solució:
Siga el rectangle $ABCD, \overline{AB} = 8$
Siga O el centre de la circumferència de radi 3.
$\overline{AD} = 6$
Siga P el centre de la circumferència de radi $\overline{PK} = r$
Siga Q la projecció de O sobre la recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa per P.
$\overline{OQ} = 3 - r, \ddot{OP} = 3 + r, \overline{PQ} = 5 - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\overset{\Delta}{Q}P$:
$(3 + r)^2 = (5 - r)^2 + (3 - r)^2$
Simplificant:
$r^2 - 22r + 25 = 0$
Resolent l'equació:
$r = 11 - 4\sqrt{6}$



2726.- Quatre quadrats iguals tenen els costats sobre els costats d'un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels quatre quadrats i la del triangle equilàter.



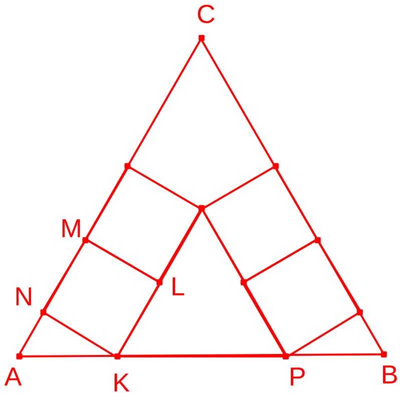
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat KLMN de costat $\overline{KL} = x$.

$\overline{KP} = 2x$

$\overline{AK} = \dfrac{c-2x}{2}$

$\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{AK} = \dfrac{c-2x}{4}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANK}$:

$$\frac{x}{\frac{c-2x}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

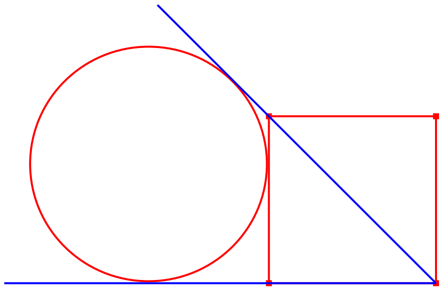
Resolent l'equació:

$$x = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}c$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{4Q}}{S_{ABC}} = \frac{4x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{4\left(21-12\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} = 4\left(-12+7\sqrt{3}\right) \approx 0.4974$$

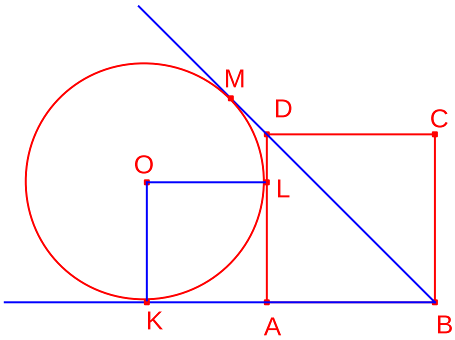
2727.- El quadrat s'ha construït utilitzant tres tangents a una circumferència de radi 1.
Calculeu l'àrea del quadrat.



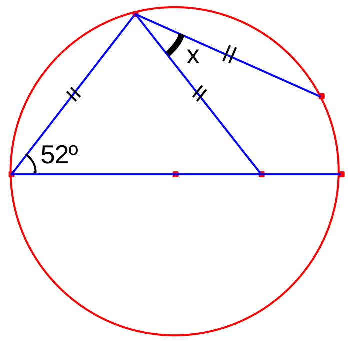
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la circumferència de centre O i radi 1.

Siguen K, L, M els punts de tangència.
$\overline{AL} = \overline{AK} = \overline{OK} = 1$
$\overline{DL} = \overline{DM} = c - 1$
$\overline{BD} = c\sqrt{2}$

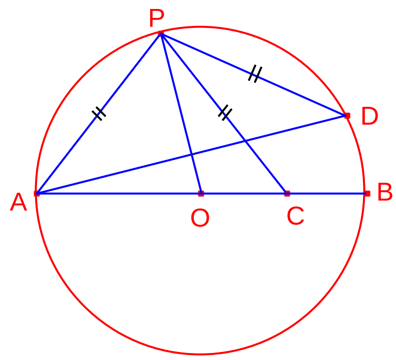
$\overline{BM} = \overline{BA}$
$c - 1 + c\sqrt{2} = 1 + c$
Resolent l'equació:
$c = \sqrt{2}$
L'àrea del quadrat ABCD és:
$S_{ABCD} = 2$



2728.- S'han dibuixat tres segments iguals amb un extrem comú de la circumferència.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siguen els segments $\overline{PA} = \overline{PC} = \overline{PD}$
Siga $x = \angle CPD$.

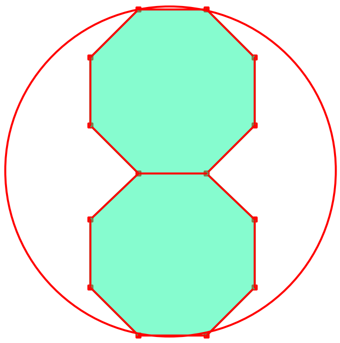


El triangle $\overset{\Delta}{ACP}$ és isòsceles.
Aleshores, $\angle APC = 76°$

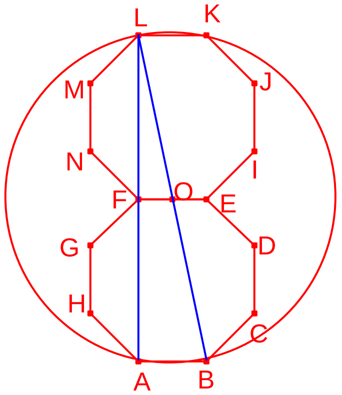
El triangle $\overset{\Delta}{AOP}$ és isòsceles.
Aleshores, $\angle APO = 52°$
Aleshores, $\angle AOP = 76°$

$\angle OPC = \angle APC - \angle APO = 76° - 52° = 24°$
El triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és isòsceles.
Aleshores, $\widehat{AP} = \widehat{PD}$
Aleshores, $\overline{OP}$ és mediatriu de la corda $\overline{AD}$
Per tant, $\angle APO = \angle OPD$
$24° + x = 52°$
Aleshores, $x = 28°$

2729.- En una circumferència hi ha inscrits dos octògons regulars de costat 1.
Calculeu el radi de la circumferència.

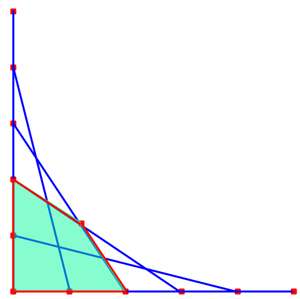


Solució:

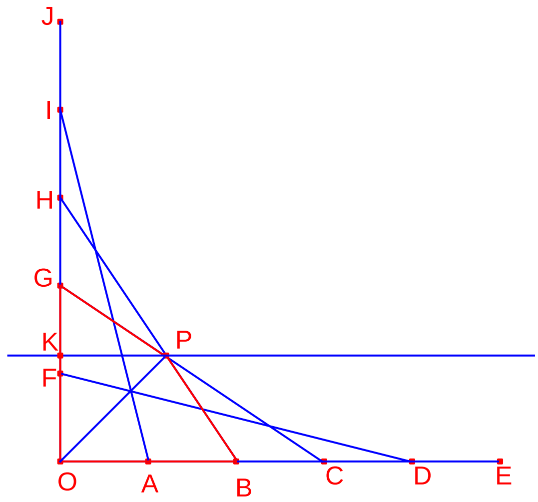


Siguen els octògons regulars $ABCDEFGH, FEIJKLMN$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre O, el punt mig del costat $\overline{FE}$, i diàmetre $\overline{BL} = 2R$
$\overline{AF} = 1 + \sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABL}$:
$4R^2 = 1 + \left(2 + 2\sqrt{2}\right)^2$
Aleshores:
$$R = \frac{\sqrt{13 + 8\sqrt{2}}}{2}$$

2730.- Dos segments perpendiculars de longitud 5 cm s’han dividit en 5 parts iguals.
Calculeu l’àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siguen els segments $\overline{OE} = \overline{OJ} = 5$
Siga P la intersecció dels segments $\overline{BH}, \overline{CG}$
El punt P pertany a la bisectriu dels segments.
Siga K la projecció de P sobre el segment $\overline{OJ}$
Siga $\overline{OK} = \overline{PK} = x$



$\overline{GK} = 2 - x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GKP}, \overset{\Delta}{GOC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{3} = \frac{2 - x}{2}$$
Resolent l’equació:
$$x = \frac{6}{5}$$
L’àrea de la regió ombrejada ABPG és:
$$S_{ABPG} = 2 \cdot S_{OPG} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$