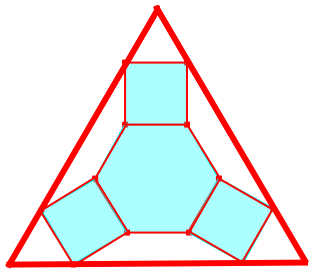
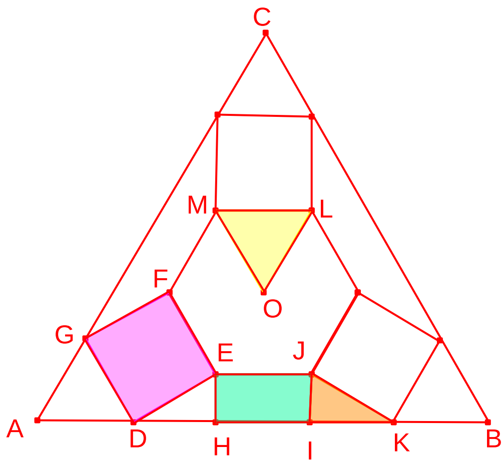
2731.- Dins d'un triangle equilàter s'han dibuixat un hexàgon regular i tres quadrats d'igual costat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle equilàter.



Solució:
Siga O el centre de l'hexàgon regular de costat $\overline{AB}$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Considerem el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OLM}$
Considerem el quadrat $DEFG$.
Siguen H, I les projeccions dels vèrtexs E, J de l'hexàgon regular sobre $\overline{AB}$, respectivament.

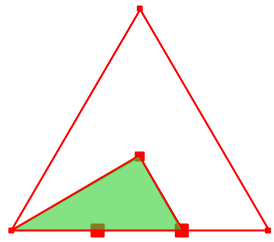


$$\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{DE}$$

$$S_{HIJE} = \frac{1}{2}S_{DEFG}$$
$$S_{IJK} = \frac{1}{2}S_{OLM}$$

L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 6 \cdot S_{OLM} + 3 \cdot S_{DEFG}$$
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = S_{ombrejada} + 3 \cdot S_{HIJE} + 6 \cdot S_{IJK} + 3 \cdot S_{ADG} = 9 \cdot S_{OLM} + \frac{9}{2}S_{DEFG}$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{6 \cdot S_{OLM} + 3 \cdot S_{DEFG}}{9 \cdot S_{OLM} + \frac{9}{2}S_{DEFG}} = \frac{2}{3}$$

2732.- El triangle ombrejat està construït l'interior del triangle equilàter utilitzant el centre del triangle equilàter i la trisecció d'un costat.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle ombrejat i el triangle equilàter.



Solució 1:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.

Siga K del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AK} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AOK}, \overset{\Delta}{AMB}$ són semblants ja que:

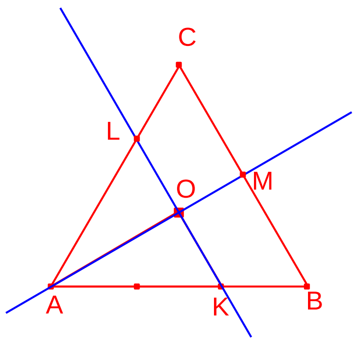
$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$$

Siga L la intersecció de la recta OK i el costat $\overline{AC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AOK}, \overset{\Delta}{AMB}$ són semblants i de raó $2:3$.

Aleshores la proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{AOK}}{S_{AMB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



La proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AOK}, \overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\frac{S_{AOK}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AOK}}{2 \cdot S_{AMB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

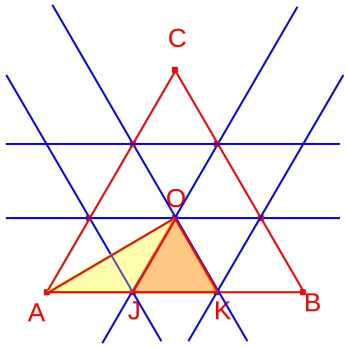
Solució 2:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.

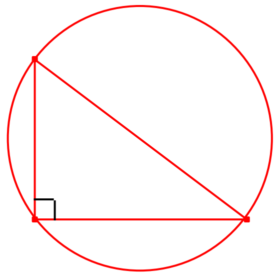
Els triangles $\overset{\Delta}{AJO}, \overset{\Delta}{JKO}$ tenen la mateixa àrea.

La proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AOK}, \overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\frac{S_{AOK}}{S_{ABC}} = \frac{2 \cdot S_{JKO}}{9 \cdot S_{JKO}} = \frac{2}{9}$$

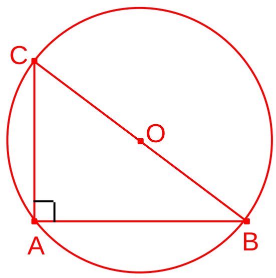


2733.- El triangle rectangle de la figura té perímetre 72 i àrea 216.
Calculeu l'àrea del cercle circumscrit al triangle.



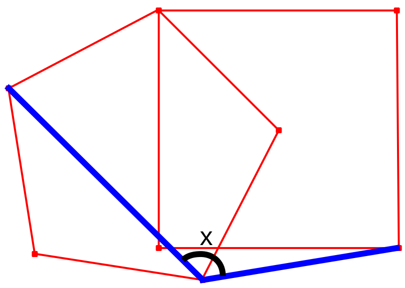
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$.
La hipotenusa del triangle és diàmetre de la circumferència circumscrita.
Siga $\overline{AB} = c, \overline{AC} = 2, \overline{BC} = 2R$, R radi de la circumferència.
El perímetre del triangle és 72:
$b + c + 2R = 72$
L'àrea del triangle és 216:
$\frac{1}{2}bc = 216$

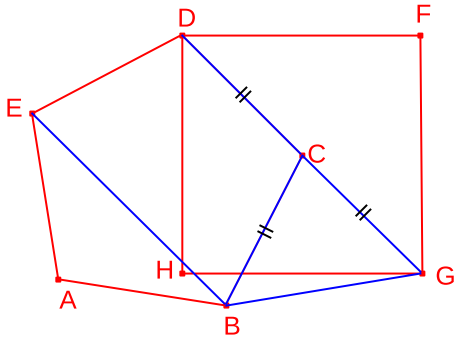


$b + c = 72 - 2R$
Elevant al quadrat:
$b^2 + c^2 + 2bc = 4R^2 + 5184 - 288R$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$4R^2 + 2bc = 4R^2 + 5184 - 288R$
Simplificant:
$2bc = 5184 - 288R$
$2 \cdot 432 = 5184 - 288R$
Resolent l'equació:
$R = 15$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$

2734.- En la figura, el quadrat té el centre i un vèrtex en dos vèrtexs consecutius del pentàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$.
Siga el quadrat $DFGH$ de centre C.



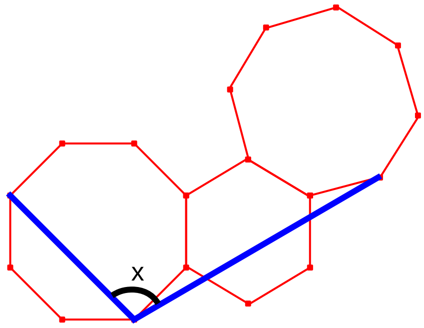
$BCDE$ és un trapezi isòsceles.
$\angle EBC = 72°, \angle BCD = 108°$

$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{CG}$

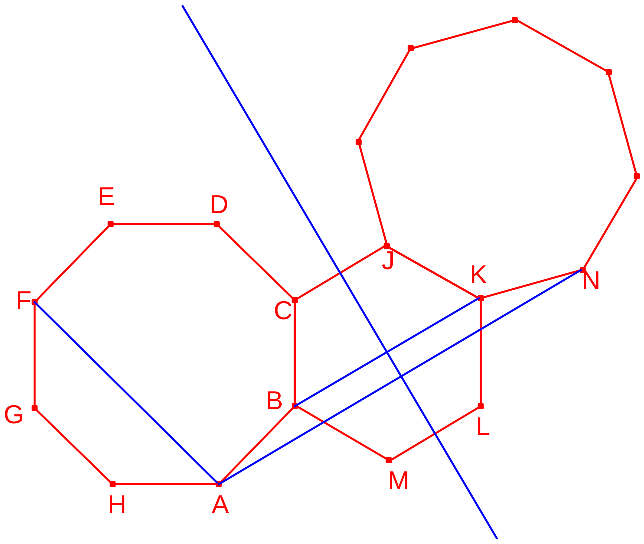
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCG}$ és isòsceles.
$\angle BCG = 180° - 108° = 72°$
$\angle CGB = \dfrac{180° - 72°}{2} = 54°$

El quadrilàter $BGDE$ és un trapezi.
Aleshores, $x = \angle EBG = 180° - \angle CGB = 180° - 54° = 126°$

2735.- Dos octògons regulars estan construïts sobre dos costats d'un hexàgon regular.
Determineu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga l'octògon regular $ABCDEFG$.
Siga l'hexàgon regular $BCJKLM$.
$\angle FAB = 90°$

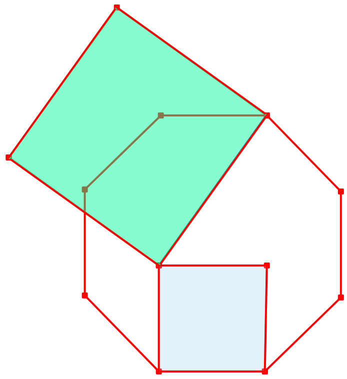
La figura és simètrica respecte de la mediatriu del segment $\overline{CJ}$.
Aleshores, els segments $\overline{BK}, \overline{AN}$ són perpendiculars a la mediatriu.

El quadrilàter $ANKB$ és un trapezi isòsceles.
Siga $\alpha = \angle BAN$

$\angle ABM = 360° - (135° + 120°) = 105°$
$\angle KBM = 60°$
Aleshores, $\angle ABK = \angle ABM + \angle KBM = 105° + 60° = 165°$
$\alpha = 180° - \angle ABK = 15°$

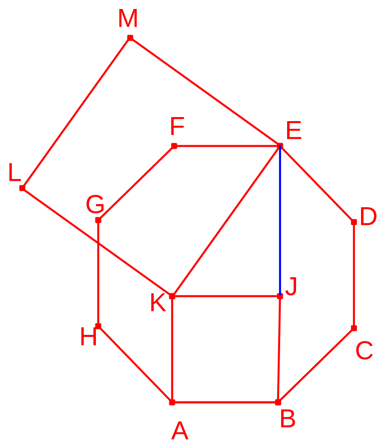
$x = \angle FAN = \angle FAK + \angle BAN = 90° + 15° = 105°$

2736.- Un quadrat s'ha construït sobre el costat d'un octògon regular i cap a l'interior de l'octògon.
Un altre quadrat té un costat construït amb un vèrtex del quadrat i un vèrtex de l'octògon regular (veure figura).
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.

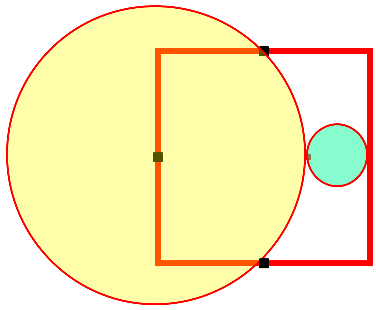


Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $ABJK$.
Els punts B, J, E estan alineats.
$\overline{BE} = (1 + \sqrt{2})c$
$\overline{EJ} = c\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KJE}$:
$\overline{KE} = c\sqrt{3}$

La proporció entre les àrees dels quadrats $ABJK, KLME$ és:
$$\frac{S_{ABJK}}{S_{KLME}} = \frac{c^2}{\left(c\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

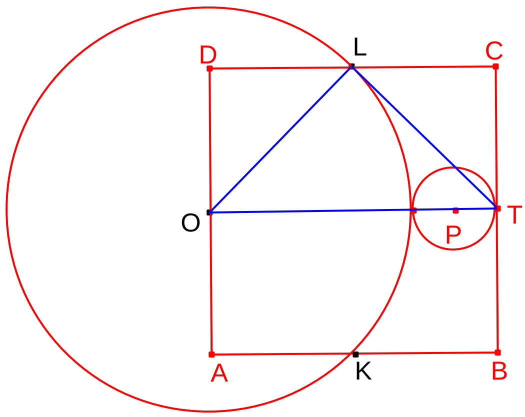


2737.- La circumferència gran està construïda amb els punts migs del costats del quadrat.
La circumferència menuda és tangent a la circumferència gran i al costat del quadrat.
Calculeu la proporció entre els radis de les dues circumferències.

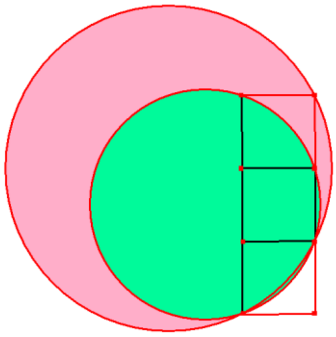


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siguen O, K, L els punts migs dels costats $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{CD}$

Siga O el centre de la circumferència gran de radi $\overline{OL} = R$
Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PT} = r$.
$\overline{OT} = R + r$
El triangle $\overset{\Delta}{OLT}$ és rectangle i isòsceles,
$\angle OLT = 90°, \overline{OL} = \overline{LT} = R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLT}$:
$2 \cdot R^2 = (R + 2r)^2$
$R^2 - 4rR - 4r^2 = 0$
$4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 4 \cdot \frac{r}{R} - 1 = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{r}{R} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$

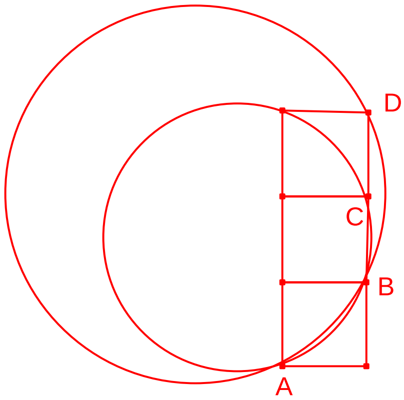


2738.- Tres quadrats iguals estan apilats compartint un costat.
Dues circumferències passen per tres vèrtexs del quadrat (dos d'ells del quadrat inferior).
Calculeu la proporció entre les àrees dels cercles.



Solució:
Siguen els tres quadrat de costat 1.

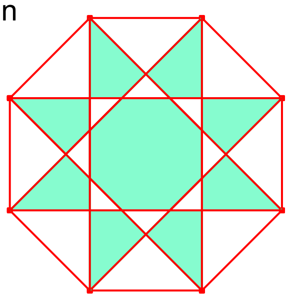
La circumferència menuda, està circumscrita a triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga r el seu radi.
$\overline{AB} = \sqrt{2}, \overline{BC} = 1, \overline{AC} = \sqrt{5}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{5}}{4r}$$
Aleshores:
$$r = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



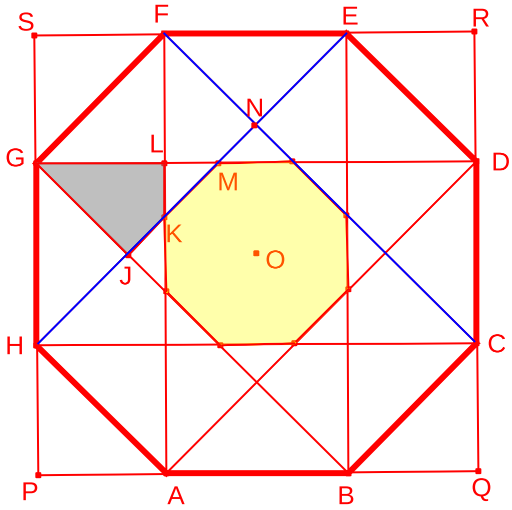
La circumferència gran, està circumscrita a triangle $\overset{\Delta}{ABD}$
Siga R el seu radi.
$\overline{AB} = \sqrt{2}, \overline{BD} = 2, \overline{AD} = \sqrt{10}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és:
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} 2 \cdot 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{10}}{4R}$$
Aleshores:
$$R = \sqrt{5}$$

La proporció entre les àrees dels dos cercles és:
$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

2739.- En un octògon regular s'ha inscrit amb els seus vèrtexs un octògon regular estrellat.
Calculeu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i l'octògon regular.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $PQRS$ que conté quatre costats de l'octògon regular.



$\overline{DR} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$
$\overline{QR} = (1+\sqrt{2})c$
L'àrea de l'octògon regular és igual a la diferència de les àrees del quadrat $PQRS$ i el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
$S_{ABCDEFGH} = \left((1+\sqrt{2})c\right)^2 - c^2 = 2(1+\sqrt{2})c^2$

Considerem el cometa $GJKL$.
$\overline{GJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$
$\angle GJK = \frac{1}{2}45°, \tan\frac{45°}{2} = \sqrt{2}-1$
Aleshores,
$\overline{JK} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}c$
L'àrea del cometa $GJKL$ és:
$S_{GJKL} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}c^2$

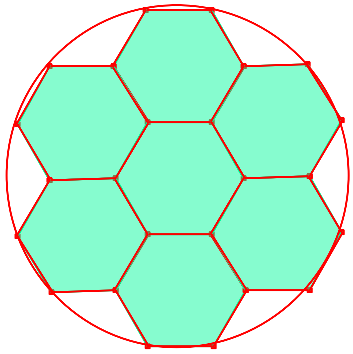
$\overline{JN} = c$
$\overline{KM} = c - 2\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}c = (\sqrt{2}-1)c$
Els octògons de costats $\overline{KM}$ i $\overline{AB}$ són semblants, les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:
$S_{KM} = (\sqrt{2}-1)^2 \cdot S_{ABCDEFGH} = (\sqrt{2}-1)^2 2(1+\sqrt{2})c^2 = 2(-1+\sqrt{2})c^2$

L'àrea ombrejada és igual a la suma de les àrees de 8 cometes $GJKL$ i l'àrea de costat $\overline{KM}$.

$$S_{ombrejada} = 8\cdot\frac{-1+\sqrt{2}}{2}c^2 + 2(-1+\sqrt{2})c^2 = 6(-1+\sqrt{2})c^2$$

La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEFGH}} = \frac{6(-1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} = 3(3-2\sqrt{2}) \approx 0.5147$$

2740.- Determineu la proporció entre les àrees de la suma dels set hexàgons regulars i el cercle.



Siguen els hexàgons regulars de costat $\overline{AB} = 1$, $\overline{CD} = 1$

Siga la circumferència de centre O, el punt mig de la diagonal $\overline{BD}$, i diàmetre $\overline{BD} = 2R$

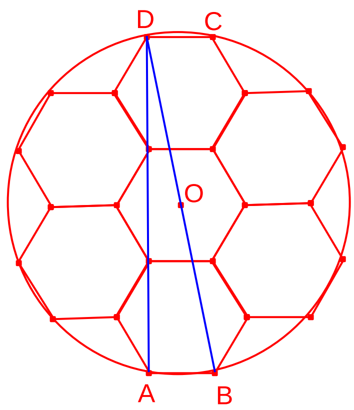
$\overline{AD} = 3\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$4R^2 = 1 + \left(3\sqrt{3}\right)^2$

Aleshores:

$R = \sqrt{7}$



La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{7H} = 7 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2}{\pi\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.8270$$