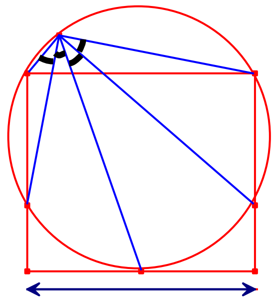
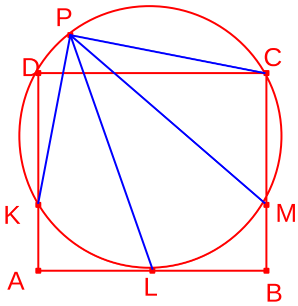
2741.- Si els quatre angle marcats són iguals i un costat del rectangle és 3, calculeu l'àrea del cercle.

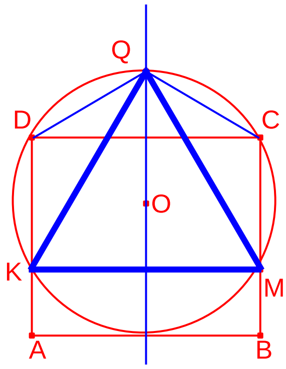


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ $\overline{AB} = 3$
Siga P el vèrtex dels quatre angles.
Siga $\angle DPK = \angle KPL = \angle LPM = \angle MPC = \alpha$



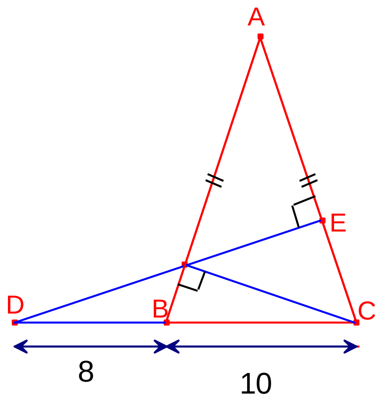
L'angle $\angle BCD = 90°$ és inscrit a la circumferència.
$\angle BCD = 90° = 3\alpha$
Aleshores, $\alpha = 30°$
$\angle KPM = 60°$

Considerem la mediatriu al costat $\overline{AB}$ que talla la circumferència en el punt Q.
$\angle KQM = 60°$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{KMQ}$ és equilàter $\overline{KM} = 3$.
Siga O el centre del triangle equilàter, centre de la circumferència.
$\overline{OQ} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{KM} = \sqrt{3}$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi$



2742.- Donat el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC}$

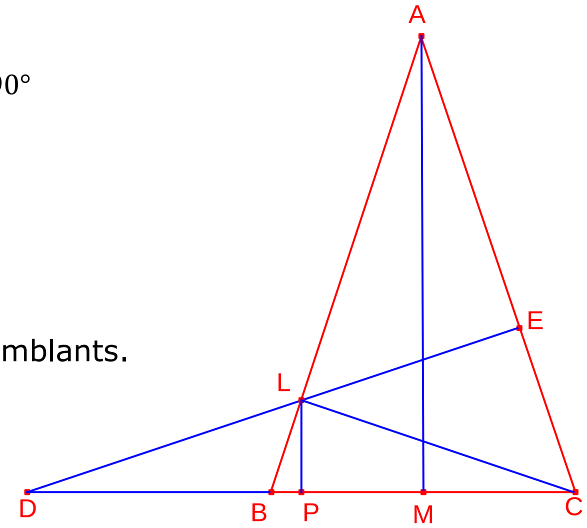
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC}$
Siga el segment $\overline{DE}$ tal que $\angle DEC = \angle BLC = 90°$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga P la projecció de L sobre $\overline{BC}$

$\overline{DL} = \overline{CL}, \overline{KP} = \overline{DP} = 9$
Siguen $\overline{AC} = x, \overline{DL} = y$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}, \overset{\Delta}{DPL}, \overset{\Delta}{CLB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 5^2}} = \frac{y}{9} = \frac{10}{y}$$

Resolent el sistema:

$y = 3\sqrt{10}, x = 5\sqrt{10}$

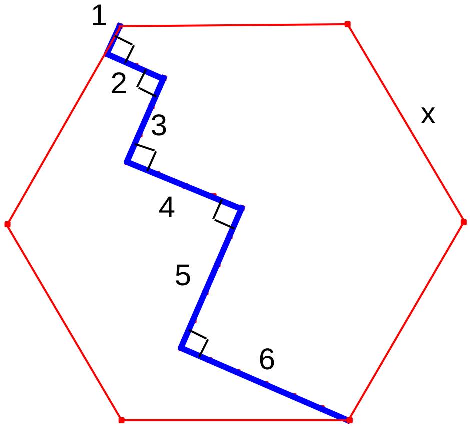
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{AM} = 15$

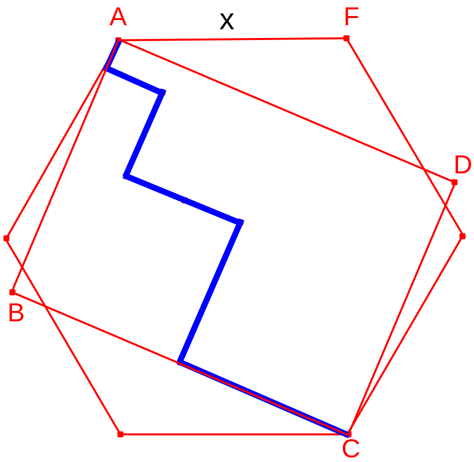
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75$$

2743.- Siga una línia poligonal amb segments perpendiculars que mesuren 1, 2, 3, 4,5, 6 dins d'un hexàgon regular.
Calculeu el costat de l'hexàgon.



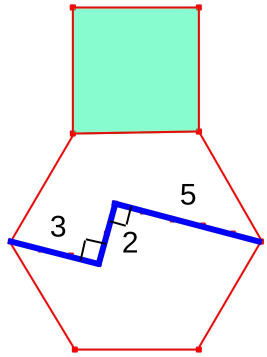
Solució:



Construïm el rectangle $ABCD$ que recobreix la línia poligonal.
$\overline{AB} = 1 + 3 + 5 = 9, \overline{AD} = 2 + 4 + 6 = 12$

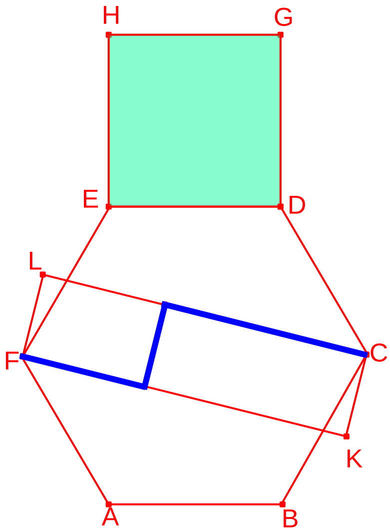
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 15$
El costat de l'hexàgon regular és igual a la meitat de la diagonal major:
$x = \dfrac{15}{2}$

2744.- Siga una línia poligonal amb segments perpendiculars que mesuren 3, 2, 5 dins d'un hexàgon regular.
Sobre el costat de l'hexàgon s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.

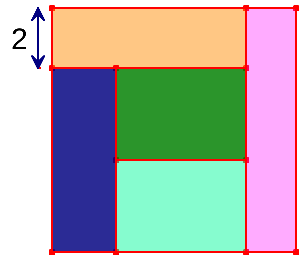


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$.
Siga el quadrat $EDGH$.
Siga el rectangle $FKCL$ recobreix la línia poligonal.
$\overline{FK} = 8, \overline{FL} = 2$

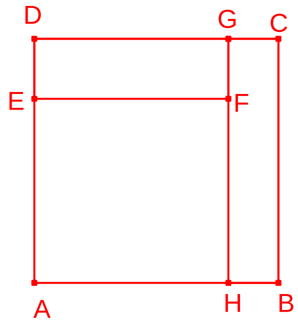
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FKC}$:
$\overline{FC} = 2\sqrt{17}$, diagonal major de l'hexàgon regular.
$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{FC} = \sqrt{17}$
L'àrea del quadrat $EDGH$ és:
$S_{EDGH} = \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$



2745.- El quadrat s'ha dividit en 5 rectangles d'iguals àrees.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució 1:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \overline{BC} = x$
Siga el rectangle $DEFG$ de costats $\overline{DE} = 2, \overline{DG} = y$
Siga el rectangle $BCGH$ de costats $\overline{BC} = x, \overline{CG} = x - y$

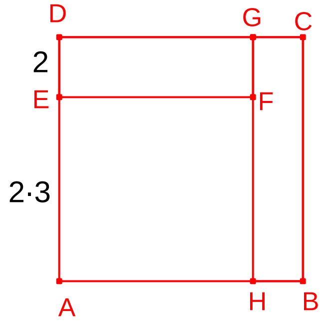


L'àrea del rectangle $DEFG$ és la cinquena part de l'àrea del quadrat $ABCD$.
$2y = \frac{1}{5}x^2$
$x^2 = 10y$

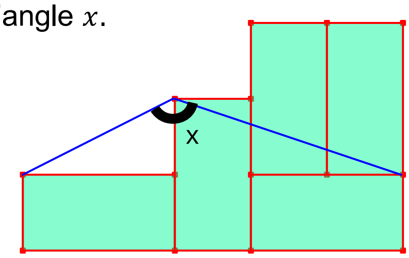
Les àrees dels rectangles $DEFG, BCGH$ són iguals.
$2y = x(x - y)$
$2y = x^2 - xy$

$2y = 10y - xy$
$8y = xy$
Simplificant:
$x = 8$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = x^2 = 64$

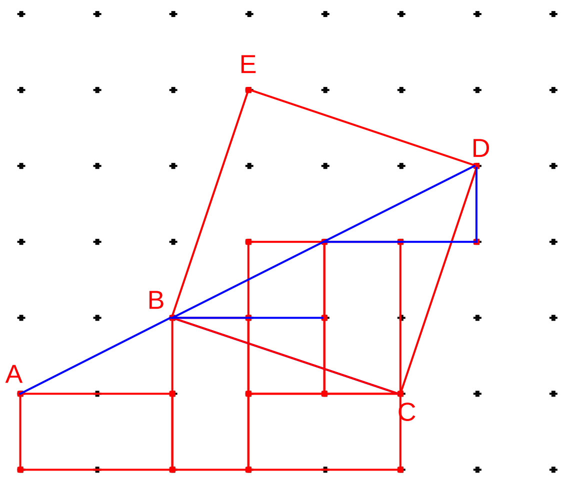
Solució 2:
Siga el quadrat $ABCD$
Siga el rectangle $DEFG$
Siga el rectangle $AHFE$ que tè àrea tres vegades l'àrea del rectangle $DEFG$.
Aleshores:
$\overline{AE} = 3 \cdot \overline{DE} = 6$
Aleshores:
$\overline{AD} = 8$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 64$



2746.- Donats els 5 rectangles iguals, calculeu la mesura de l'angle x.

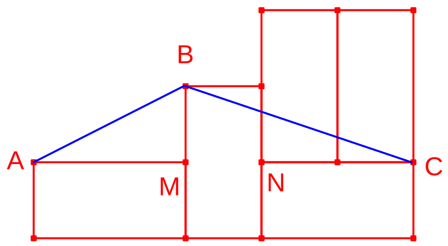


Solució 1:
Siga $x = \angle ABC$
Sobre el segment $\overline{BC}$ dibuixem el quadrat $BCDE$.
Notem que els punts A, B, D estan alineats.
$\angle CBD = 45°$
Aleshores,
$x = \angle ABC = 180° - \angle CBD = 180° - 45° = 135°$

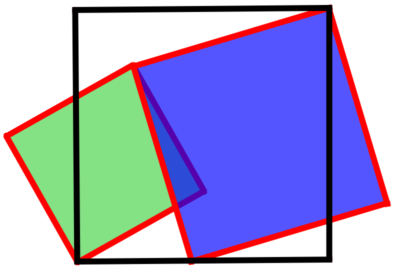


Solució 2:
$\overline{AM} = 2 \cdot \overline{BM}$
Siga $x = \angle ABC$
Siguen $\alpha = \angle ABM, \beta = \angle MBC$
$x = \alpha + \beta$
$\tan \alpha = 2, \tan \beta = 3$

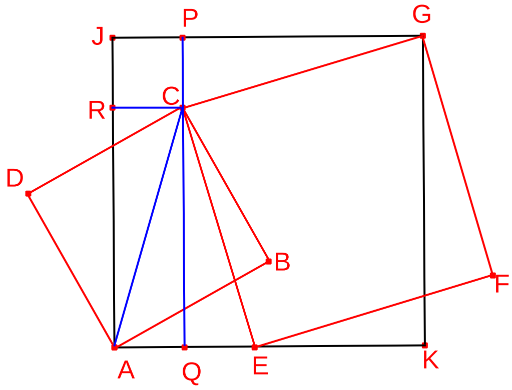
$$\tan x = \tan(\alpha + \beta) = \frac{2+3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$$
$x = 135°$



2747.- En la figura hi ha tres quadrats.
El quadrat verd té àrea 16.
Calculeu l'àrea del quadrat blau.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 16.
Siga el quadrat blau $CEFG$.
Siga el quadrat $AKGJ$.



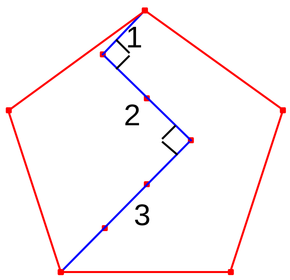
Siguen P, Q les projeccions de C sobre els costats $\overline{AK}, \overline{GJ}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GPC}, \overset{\Delta}{CQE}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PC} = \overline{QE}, \overline{CQ} = \overline{PG}, \overline{CE} = \overline{CQ}$
$\overline{PJ} = \overline{PC}$
Siga R la projecció de C sobre el costat $\overline{AJ}$
$\overline{PJ} = \overline{CR}, \overline{AR} = \overline{PG}$

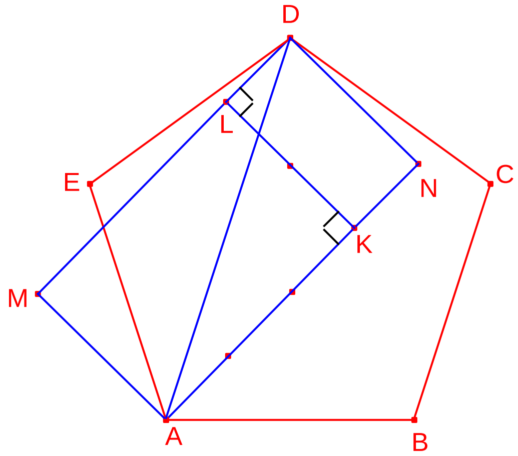
Aleshores, el triangle rectangles $\overset{\Delta}{GPC}, \overset{\Delta}{ARC}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AC} = \overline{CQ} = \overline{CE}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2 = 2 \cdot 16 = 32$
L'àrea del quadrat $CEFG$ és:
$S_{CEFG} = \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 = 32$

2748.- Siga una línia poligonal amb segments perpendiculars que mesuren 3, 2, 1 que uneixen els vèrtex que formen una diagonal d'un pentàgon regular.
Calculeu el costat del pentàgon.



Solució:



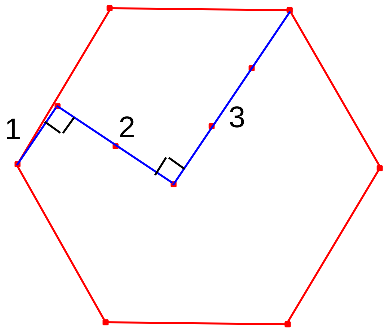
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la línia poligonal $AKLD$, $\overline{AK} = 3, \overline{KL} = 2, \overline{LD} = 1$ de segments perpendiculars.

La diagonal $\overline{AD}$ és igual a la diagonal del rectangle $ANDM$ de costats paral·lels a la línia poligonal.
$\overline{AN} = 4, \overline{AM} = 2$

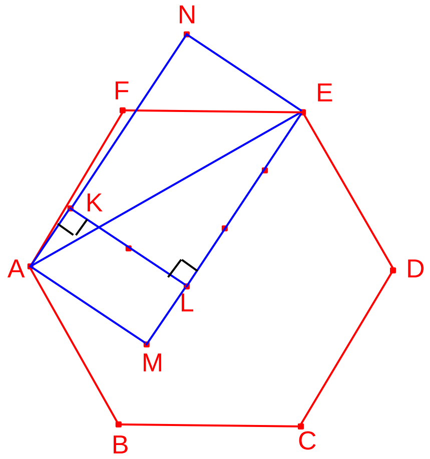
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAN}$:
$\overline{AD} = 2\sqrt{5}$
La proporció entre la diagonal d'un pentàgon regular i el costat és el nombre d'or:
$$\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}c$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}c = 2\sqrt{5}$$
$$c = \frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 5 - \sqrt{5}$$

2749.- Siga una línia poligonal amb segments perpendiculars que mesuren 1, 2, 3 que uneixen els vèrtex que formen una diagonal d'un hexàgon regular.
Calculeu l'àrea del hexàgon.



Solució:



Siga el hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la línia poligonal $AKLE$, $\overline{AK} = 1, \overline{KL} = 2, \overline{LE} = 3$ de segments perpendiculars.

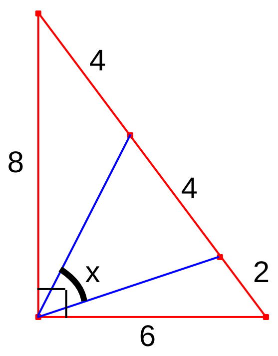
La diagonal $\overline{AE}$ és igual a la diagonal del rectangle $AMEN$ de costats paral·lels a la línia poligonal.
$\overline{AN} = 4, \overline{AM} = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:
$\overline{AE} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AE} = c\sqrt{3}$

$c\sqrt{3} = 2\sqrt{5}$
$c^2 = \frac{20}{3}$
L'àrea de l'hexàgon regular és:
$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{20}{3} = 10\sqrt{3}$

2750.- La hipotenusa del triangle rectangle de catets 6, 8 s'ha dividit en 3 segments 4-4,2.
Calculeu la mesura de l'angle x



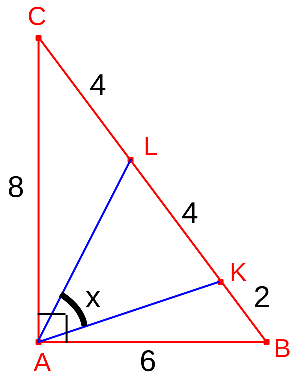
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 6, \overline{AC} = 8, \overline{BC} = 10$

Siguen K, L punts de la hipotenusa tal que $\overline{BK} = 2, \overline{KL} = 4, \overline{LC} = 4$

Siga $\alpha = B$

$C = 90° - \alpha$



El triangle $\overset{\Delta}{ABL}$ és isòsceles:

$\angle LAB = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$

El triangle $\overset{\Delta}{AKC}$ és isòsceles:

$\angle ACK = 45° + \dfrac{\alpha}{2}$

$\angle KAB = 90° - \angle ACK = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$

$x = \angle LAB - \angle KAB = 90° - \dfrac{\alpha}{2} - \left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 45°$