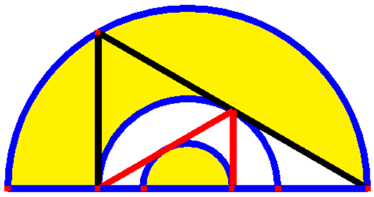
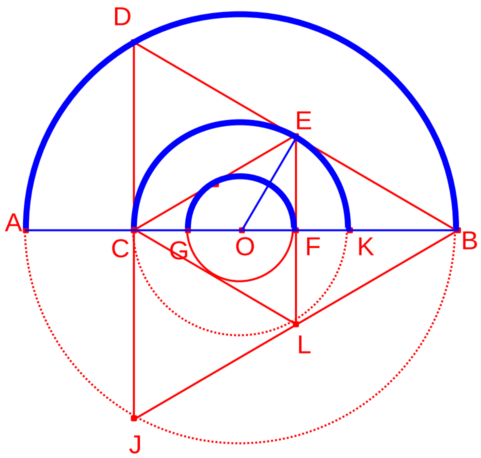
2751.- En la figura, hi ha dos triangles rectangles i tres semicercles concèntrics.
Determineu la proporció entre l'àrea pintada de groc i l'àrea del semicercle gran.



Solució:

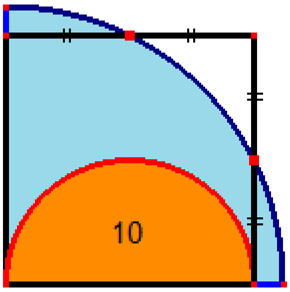


Siga O el centre dels tres semicercles concèntrics.
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{CK} = 2r$
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{GF} = 2s$

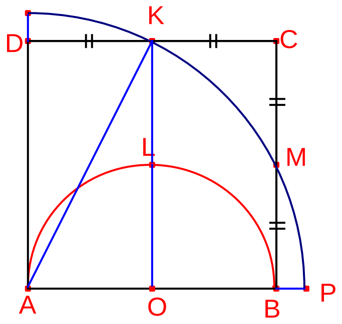
Siga E el punt de tangència de la hipotenusa $\overline{BD}$ i el semicercle de diàmetre $\overline{CK}$
$\overline{DE} = \overline{BE} = \overline{DC} = \overline{CE}$
Aleshores els triangles rectangles del problema són $30° - 60° - 90°$
$r = \frac{1}{2}R, s = \frac{1}{4}R$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{groga}}{S_{total}} = \frac{(R^2 - r^2) + s^2}{s^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\right)R^2 + \frac{1}{16}R^2}{R^2} = \frac{13}{16}$$

2752.- El semicercle taronja té àrea 10.
Calculeu l'àrea ombrejada de blau.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2r$, diàmetre del semicercle d'àrea 10.
Siguen K, M els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga O el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{AK} = R$ radi del quadrant.

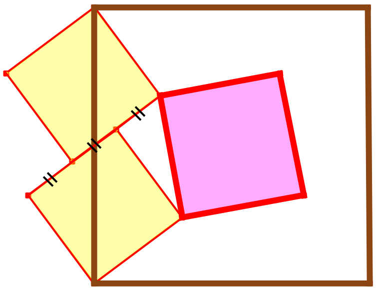
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADK}$:
$R^2 = 5 \cdot r^2$
El quadrat del semicercle d'àrea 10 té la meitat d'àrea.
L'àrea de dos semicercles és proporcional al quadrat dels radis.

$$\frac{S_{aA}}{S_{qO}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 5$$

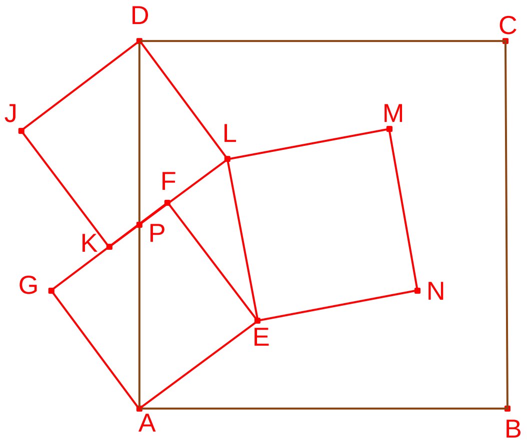
Aleshores, l'àrea del quadrat de centre A és:
$S_{qA} = 5 \cdot 5 = 25$

L'àrea ombrejada de blau és:
$S_{blava} = 25 - 10 = 15$

2753.- En la figura hi ha 4 quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat lila i del quadrat marró.



Solució:



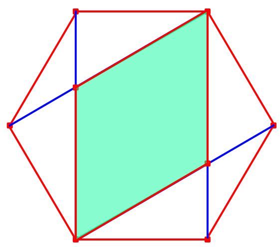
Siga el quadrat marró $ABCD$.
Siguen els quadrats iguals $AEFG, DJKL$ de costat $\overline{AE} = 4x$
$\overline{GK} = \overline{KF} = \overline{FL} = 2x$
El costat $\overline{AD}$ talla el segment $\overline{KF}$ en el punt mig P.

Siga el quadrat lila $ELMN$.

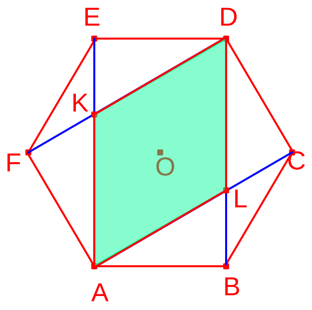
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFL}$, l'àrea del quadrat $ELMN$ és:
$S_{ELMN} = \overline{EL}^2 = 20 \cdot x^2$

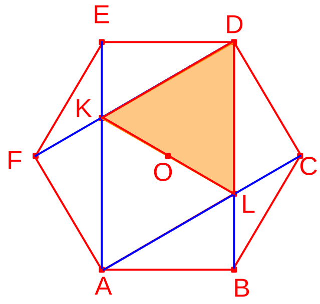
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGP}$:
$\overline{AP} = 5x$
$\overline{AD} = 10x$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = (10x)^2 = 100 \cdot x^2$
La proporció entre les àrees dels quadrats $ELMN$ i $ABCD$ és:
$$\frac{S_{ELMN}}{S_{ABCD}} = \frac{20 \cdot x^2}{100 \cdot x^2} = \frac{1}{5}$$

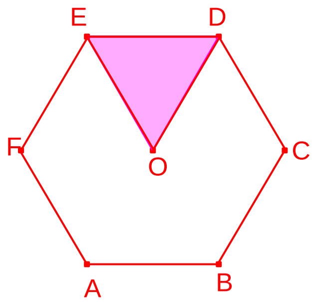
2754.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució 1:







Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siga el rombre $ALDK$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{KLD}$ és equilàter.

El triangle $\overset{\Delta}{ODE}$ és equilàter.
L'àrea dels triangles equilàters és proporcional al quadrat dels costats.

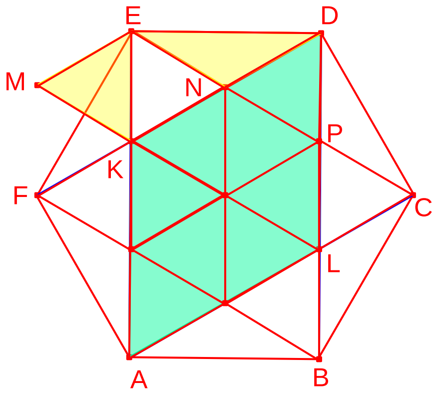
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LCD}$

$$\overline{DL} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$$

La proporció entre les àrees del rombe $ALDK$ i l'hexàgon regular $ABCDEF$ és:

$$\frac{S_{ALDK}}{S_{ABCDEF}} = \frac{2 \cdot S_{ODE}}{6 \cdot S_{KLD}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\overline{DL}}{\overline{DE}}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Solució 2:



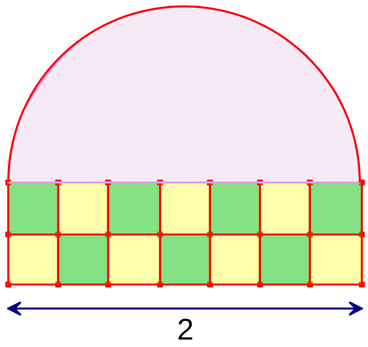
[DNE]=[EKM]=[DNP]

[ALDK]=8[DNP]

[ABCDEF]=18[DNP]

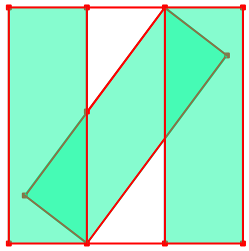
[ALDK]/[ABCDEF]=4/9

2755.- La figura està formada per quadrats i una semicircumferència.
Calculeu el perímetre de la figura.
Catriona Shearer, 22-7-2020.

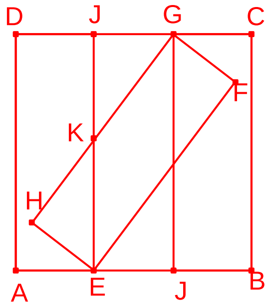


Solució:
El radi de la semicircumferència és 1.
El costat del cadascun dels quadrats és $\frac{2}{7}$.
El perímetre de la figura és:
$$P = \frac{1}{2} 2\pi \cdot 1 + 11 \cdot \frac{2}{7} = \pi + \frac{22}{7} \approx 2\pi$$

2756.- Els tres rectangles ombrejats de la figura són iguals i estan dins d'un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siguen els rectangles iguals $AEJD, JBCG, HEFG$.
Siga $\overline{AE} = x$
Siga K la intersecció de $\overline{EJ}, \overline{GH}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EHK}, \overset{\Delta}{GJK}$ són iguals aleshores:
$\overline{JG} = \overline{HE} = a, \overline{EK} = \overline{GK} = x$
$\overline{AB} = 3a$

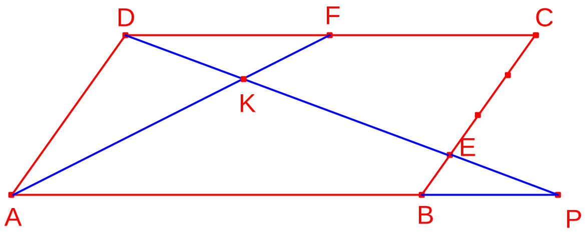
$\overline{HK} = 3a - x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EHK}$:
$x^2 = a^2 + (3a - x)^2$
Simplificant:
$x = \frac{5}{3}a$

$\overline{HK} = \frac{4}{3}a$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 9a^2$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat $ABCD$ menys dues vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{EHK}$
$S_{ombrejada} = 9a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{4}{3}a = \frac{23}{3}a^2$
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{23}{3}a^2}{9a^2} = \frac{23}{27}$

2757.- Siga un paral·lelogram $ABCD$.
Siguen E, F dos punts dels costats $\overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament.
Suposem que $\overline{CE} = 3 \cdot \overline{BE}$ i $\overline{CF} = \overline{DF}$.
Siga K la intersecció de $\overline{DE}$ i $\overline{AF}$.
Siga $\overline{KF} = 6$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AK}$.
Crux Mathematicorum MA80.

Solució:
Siga P la intersecció de les rectes AB i DE.
Siga $a = \overline{DF}, \overline{AB} = 2a$

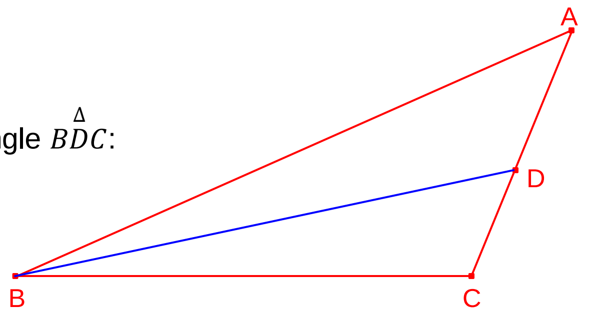


Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{BPE}$ són semblants i de raó 3:1
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{BP} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{2}{3}a$$
$$\overline{AP} = 2a + \frac{2}{3}a = \frac{8}{3}a$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DFK}, \overset{\Delta}{PAK}$ són semblants i de raó $1:\frac{8}{3}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{AK} = \frac{8}{3} \cdot \overline{KF} = \frac{8}{3} \cdot 6 = 16$$

2758.- Siga $\overline{BD}$ l bisectriu interior de l'angle $\angle ABC$.
Si $\overline{BD} = 3\sqrt{5}, \overline{AB} = 8$ i $\overline{DC} = \frac{3}{2}$.
Determineu la mesura de $\overline{AD} + \overline{BC}$.
Crux Mathematicorum MA79

Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Suposem que $\overline{BC} = \overline{BA} = 8$.
Aleshores, $\angle BDC = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{45 + \frac{9}{4}} \neq 8$$

Aleshores, $\overline{BC} \neq 8$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{\overline{AD}}{8} = \frac{\frac{3}{2}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{AD} = \frac{12}{\overline{BC}}$$

Siga $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{AD}^2 = 45 + 64 - 48\sqrt{5} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{109 - \overline{AD}^2}{48\sqrt{5}}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\frac{9}{4} = 45 + \overline{BC}^2 - 6\sqrt{5} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{9}{4} = 45 + \overline{BC}^2 - \overline{BC} \cdot \frac{109 - \overline{AD}^2}{8}$$

$$\frac{9}{4} = 45 + \overline{BC}^2 - \overline{BC} \cdot \frac{109 - \left(\frac{12}{\overline{BC}}\right)^2}{8}$$

Simplificant:

$$8 \cdot \overline{BC}^3 - 109 \cdot \overline{BC}^2 + 342 \cdot \overline{BC} + 144 = 0$$

Resolent l'equació:

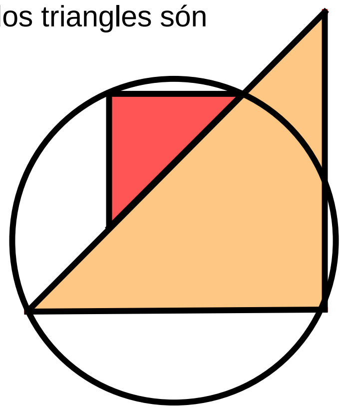
$$\overline{BC} = 6, 8, -\frac{3}{8}$$

Aleshores,

$$\overline{BC} = 6, \overline{AD} = 2$$

Aleshores, $\overline{AD} + \overline{BC} = 8$

2759.- La circumferència de la figura té radi 1 i els dos triangles són rectangles i isòsceles.
Calculeu la suma de les àrees dels dos triangles.



Solució:

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC},\ B = 90°, \overline{AB} = \overline{BC} = a$.

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEF},\ E = 90°, \overline{DE} = \overline{EF} = b$

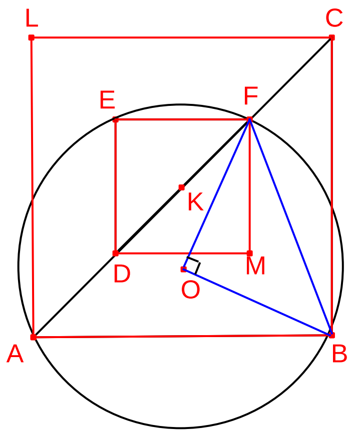
$\angle FAB = 45°$

El radi de la circumferència és 1.

Aleshores, $\overline{BF} = \sqrt{2}$

Construïm els quadrat $ABCL, DEFM$ que són concèntrics.

Siga K el centre dels dos quadrats.



$\overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \overline{FK} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

$\overline{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$$(\sqrt{2})^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) \cdot \cos 45°$$

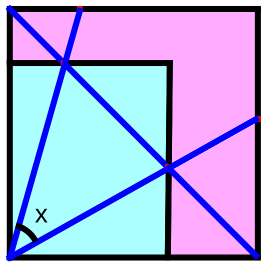
$$2 = a^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab) - a(a+b)$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 2$$

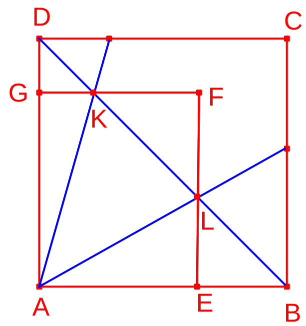
La suma de les àrees és:

$$S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 2$$

2760.- L'àrea del rectangle és la meitat de l'àrea del quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el rectangle AEFG de costats $\overline{AE} = a, \overline{AG} = \frac{1}{2a}$.
Siga $x = \angle KAL$
Siga $\angle GAK = \alpha, \angle LAE = \beta$



$$\overline{DG} = \overline{GK} = 1 - \frac{1}{2a}$$
$$\overline{BE} = \overline{EL} = 1 - a$$

$$\tan\alpha = 1 - \frac{1}{2a}$$
$$\tan\beta = \frac{1-a}{a}$$
$$x = 90° - (\alpha + \beta) = (90° - \alpha) - \beta$$
$$\tan x = \tan\big((90° - \alpha) - \beta\big) = \frac{\tan(90° - \alpha) - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{2a}{2a-1} - \frac{1-a}{a}}{1 + \frac{2a}{2a-1} \cdot \frac{1-a}{a}} =$$
$$= \frac{2a^2 - 2z + 1}{2a^2 - 2a + 1} = 1$$

Aleshores, $x = 45°$