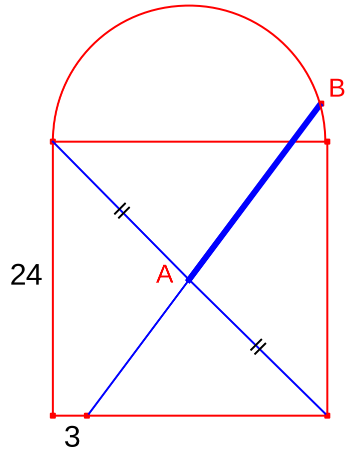
2761.- En la figura sobre el costat d'un quadrat de costat 24 s'ha dibuixat un semicercle.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$

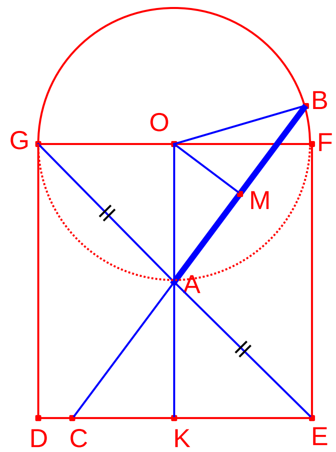


Solució:
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = 24$.
Siga C sobre el costat $\overline{DE}$ tal que $\overline{DC} = 3$.
A és el centre del quadrat.
La projecció K del punt A sobre el costat $\overline{DE}$ és el punt mig del costat.
$\overline{AK} = 12, \overline{CK} = 12 - 3 = 9$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKA}$:
$\overline{AC} = 15$
El punt mig O del costat $\overline{FG}$, centre de la semicircumferència.
La circumferència de centre O i diàmetre $\overline{FG}$ passa pel punt A.
El triangle $\overset{\Delta}{ABO}$ és isòsceles, $\overline{OA} = \overline{OB} = 12$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKA}, \overset{\Delta}{OMA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

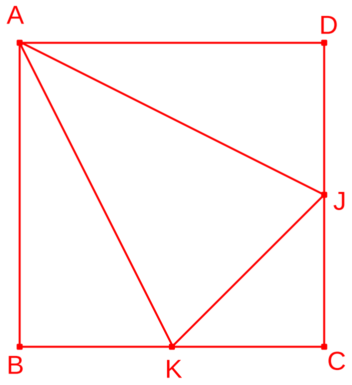
$$\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{12} = \frac{12}{15}$$

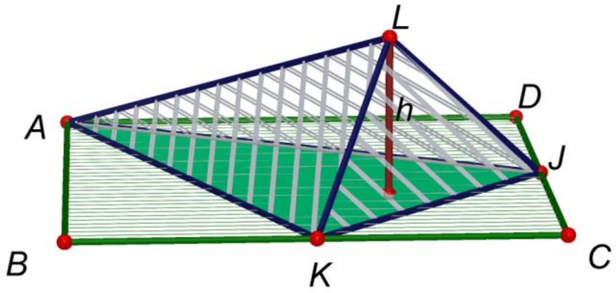
Resolent l'equació:

$$\overline{AB} = \frac{96}{5}$$

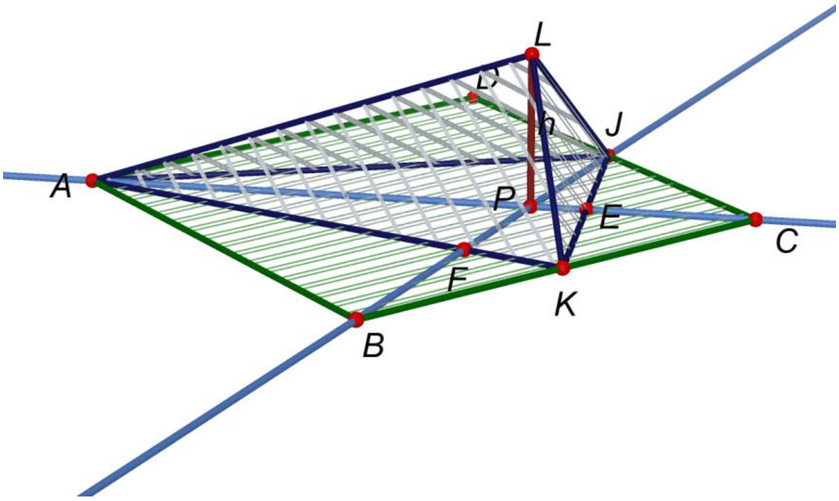


2762.- Doblegant el quadrat $ABCD, \overline{AB} = 1$ a partir del vèrtex A i els punts migs dels costats que no contenen el vèrtex A és forma un tetràedre.
Calculeu la mesura de l'altura i el volum del tetràedre resultant.





Solució:



Siga el tetràedre $AKJL$, $\overline{KL} = \overline{JL} = \overline{CJ} = \frac{1}{2}, \overline{AL} = \overline{AB} = 1$

$$\overline{KJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{AK} = \overline{AJ} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Siga P la projecció de L sobre la base $\overset{\Delta}{AKJ}$.

P és l'ortocentre del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKJ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEK}$:

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKJ}$ és:

$$S_{AKJ} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \overline{FJ}$$

Aleshores:

$$\overline{FJ} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JEP}, \overset{\Delta}{JFK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{JP}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{10}}$$

Aleshores:

$$\overline{JP} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

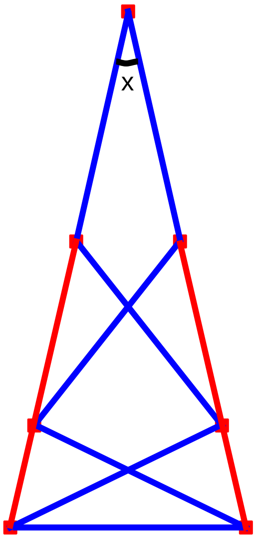
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JPL}$:

$$h = \frac{1}{3}$$

El volum del tetràedre és:

$$V_{AKJL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{3}{4} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

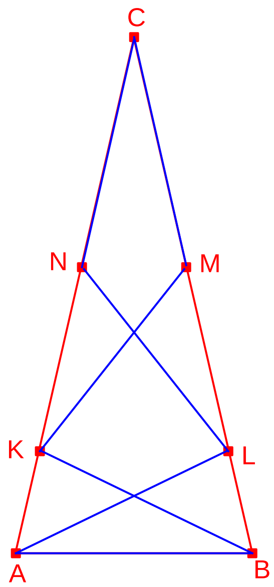
2763.- En la figura, els sis segments blaus són iguals i els dos segments rojos són iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

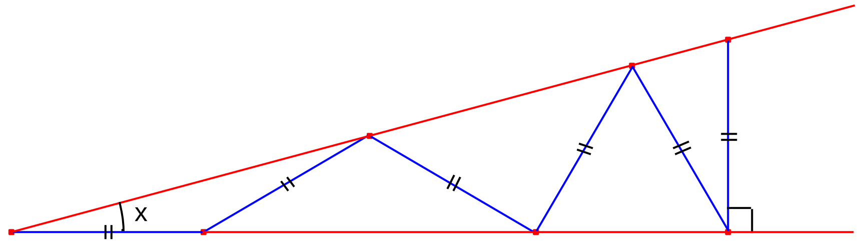
Siga el triangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}$ que és isòsceles.

El triangle $\overset{\Delta}{CML}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle MLC = x$
$\angle ANL = 2x$
El triangle $\overset{\Delta}{ALN}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle NAL = 2x$

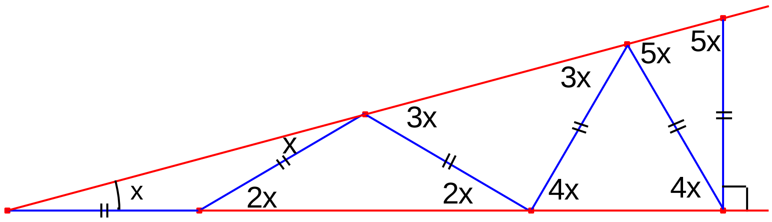


Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BLA}$ són semblants, aleshores:
$\angle LAB = x$
$\angle CAB = \angle ABC = 3x$
La suma dels angles d'un triangle és 180º:
$x + 3x + 3x = 180°$
$x = \dfrac{180°}{7}$

2764.- Els sis segments blaus de la figura són iguals.
Determineu l'angle x

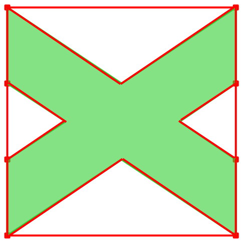


Solució:

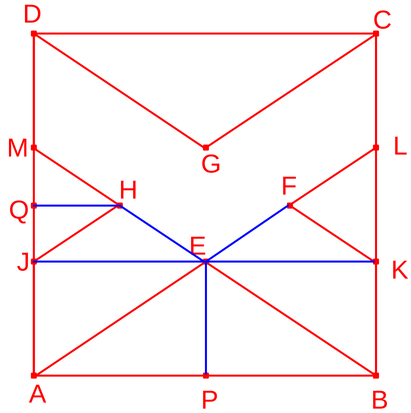


$x + 5x = 90°$
$x = 15°$

2765.- Els costats oposats d'un quadrat s'ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrats.

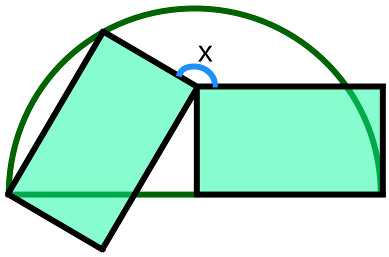


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 1$
Siga $AEBKFLCGDMHJ$ la zona ombrejada.
Els punts H, F pertanyen a la paral·lela mitjana del quadrat
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga Q el punt mig del costat $\overline{AD}$

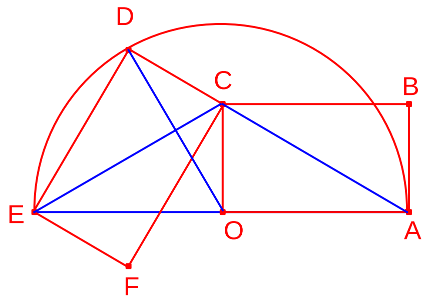


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABL}, \overset{\Delta}{APE}$ són semblants i de raó $2:1$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{PE} = \frac{1}{2}\overline{BL} = \frac{1}{3}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{QHM}$ són semblants i de raó $4:1$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{QH} = \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{4}$$
$\overline{QH}$ és perpendicular a $\overline{AD}$.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat menys dues vegades la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{JHM}$:
$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - 2(S_{ABE} + S_{JHM}) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16}$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{16}$$

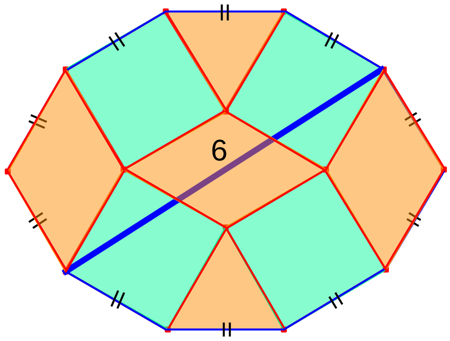
2766.- Els dos rectangles de la figura són iguals.
Determineu la mesura de l'angle x



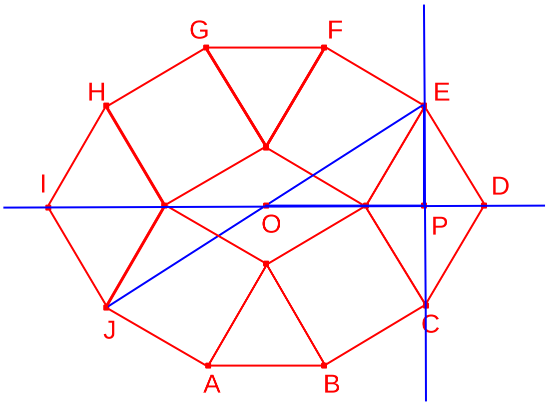
Solució:
Siguen els rectangles iguals $OABC, CDEF$.
$\overline{CE} = \overline{CA}$
Aleshores, O és el centre de la semicircumferència.
$\angle EDC = 90°$, aleshores els punts D, C, A estan alineats.
Notem que $\overline{OE} = \overline{OD} = \overline{DE}$
Aleshores, $\angle DEO = 60°$
$\angle EAD = 30°$
$\angle ACB = 30°$
Aleshores, $x = \angle DCB = 180° - \angle ACB = 150°$



2767.- El decàgon de la figura té els costats iguals.
La diagonal assenyalada mesura 6.
Calculeu l'àrea del decàgon.



Solució:



Siga el decàgon equilàter $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga O el centre del decàgon.
El decàgon esrà format per 4 quadrats i 8 triangles equilàters de costat $\overline{AB} = c$
Les rectes IO, CE és tallen en el punt P.

$$\overline{EP} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \overline{OP} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c, \overline{OE} = 3$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPE}$:

$$3^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}c\right)^2$$

Simplificant:

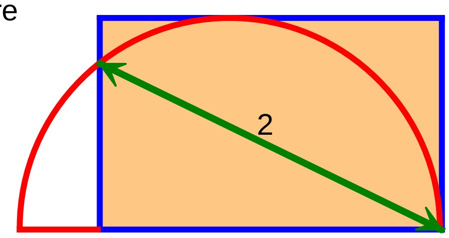
$$c^2 = \frac{36(7-2\sqrt{3})}{37}$$

L'àrea del decàgon és:

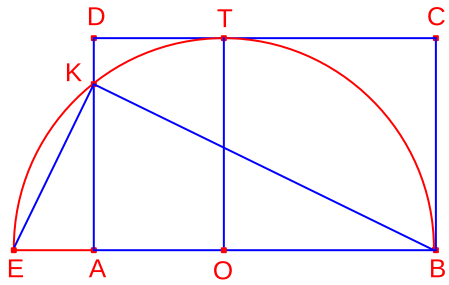
$$S_{10} = 4 \cdot c^2 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

$$S_{10} = 4 \cdot \frac{36(7-2\sqrt{3})}{37} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{36(7-2\sqrt{3})}{37} = \frac{72(8+3\sqrt{3})}{37}$$

2768.- Un rectangle té un costat sobre el diàmetre del semicercle i el costat oposat és tangent al semicercle.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga O el centre de la semicircumferència.
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{CD}$.
$OBCT$ és un quadrat.
Siga K el punt del semicercle i del costat $\overline{AD}$ tal que $\overline{BK} = 2$
Siga $\overline{OB} = r$, radi del semicercle.
Siga $\overline{OA} = x$
Siga $\overline{AK} = y$



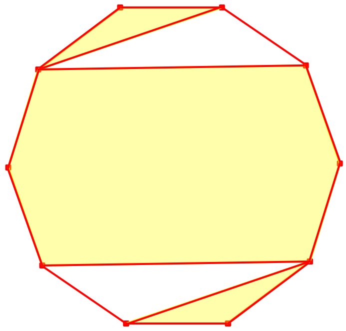
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = r(r + x)$

$\overline{EA} = r - x$

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EKB}$
$y^2 = (r + x)(r - x)$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}$
$y^2 = 4 - (r + x)^2$
Igualant ambdues expressions:
$(r + x)(r - x) = 4 - (r + x)^2$
Simplificant:
$4 = 2(r^2 + rx)$
$r^2 + rx = 2$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = r(r + x) = r^2 + rx = 2$

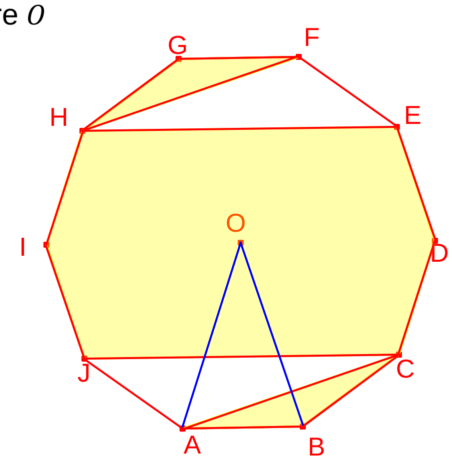
2769.- Calculeu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada i del decàgon regular de la figura.



Solució:

Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O

$\overline{OA} = \Phi \cdot c$



L'àrea del decàgon és:

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1}{2}\Phi^2 \cdot c^2 = 5\Phi^2 \cdot c^2 \cdot \sin 36°$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACJ}$

$$\frac{\overline{CJ}}{\sin 54°} = \frac{c}{\sin 18°}, \overline{CJ} = \frac{\sin 54°}{\sin 18°}c$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACJ}$:

$$S_{ACJ} = \frac{1}{2}\frac{\sin 54°}{\sin 18°}c^2 \cdot \sin 36° = \cos 36° \cdot \cos 18° \cdot c^2 =$$

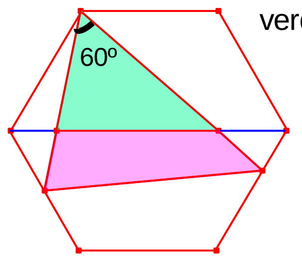
$$= \cos 36° \sin 72° \cdot c^2$$

$$= 2 \cdot \cos^2 36° \cdot c^2 \cdot \sin 36° = \frac{1}{2}\Phi^2 \cdot c^2 \cdot \sin 36°$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{10} - 2 \cdot S_{ACJ}}{S_{10}} = \frac{4}{5}$$

2770.- Calculeu la proporció entre les àrees de la regió verda i la regió lila



verda/lila?

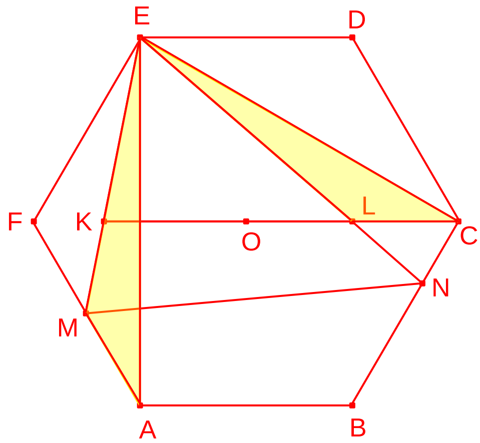
Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.

Els triangles $\overset{\Delta}{AME}, \overset{\Delta}{CLE}$ són iguals (ACA)

Aleshores:

$\overline{LC} = \overline{AM} = \frac{1}{2}, \overline{EM} = \overline{EL}$



Els triangles $\overset{\Delta}{MFK}, \overset{\Delta}{EOK}$ són semblants i de raó $2:1$

Aleshores:

$\overline{FK} = \frac{1}{3}, \overline{OK} = \frac{2}{3}, \overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{EK}$

Els triangles $\overset{\Delta}{MFK}, \overset{\Delta}{LKE}, \overset{\Delta}{LCN}$ són semblants.

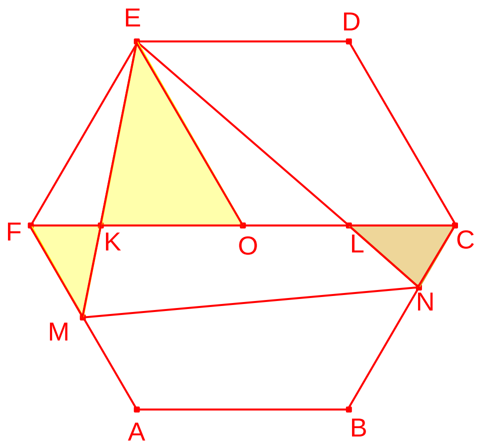
$\overline{FM} = \overline{CL}$

Aleshores:

$\overset{\Delta}{MFK}, \overset{\Delta}{LCN}$ són iguals.

Per tant:

$\overline{MK} = \overline{LN} = \frac{1}{2}\overline{EK}$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EKL}$ és:

$S_{EKL} = \frac{1}{2}\overline{EK} \cdot \overline{EL} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\overline{EK} \cdot \frac{3}{2}\overline{EK} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\overline{EK}^2$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EMN}$ és:

$S_{EMN} = \frac{1}{2}\overline{EM} \cdot \overline{EN} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\overline{EK} \cdot 2\overline{EK} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{EK}^2$

Aleshores:

$\frac{S_{EKL}}{S_{KLNM}} = 1$