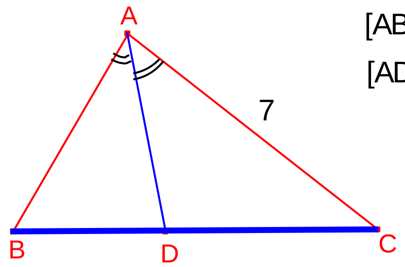
2771.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = 7$
Siga $\overline{AD}$ bisectriu del triangle.
Siga $S_{ABD} = \frac{25\sqrt{3}}{6}, S_{ADC} = \frac{35\sqrt{3}}{6}$
Calculeu la mesura del costat $\overline{BC}$



[ABD]=25·SQRT(3)/6
[ADC]=35·SQRT(3)/6
BC=?

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les bases són proporcionals a les àrees:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{6}}{\frac{35\sqrt{3}}{6}} = \frac{5}{7}$$

Siga $\overline{BD} = 5k, \overline{CD} = 7k$
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{5k}{\overline{AB}} = \frac{7k}{7}$$

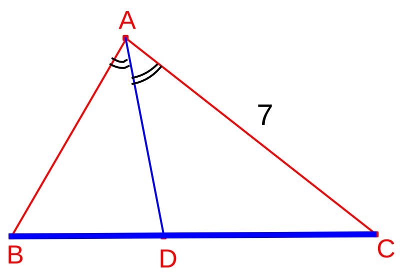
Aleshores:
$\overline{AB} = 5$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ aplicant la fórmula d'Heró és:

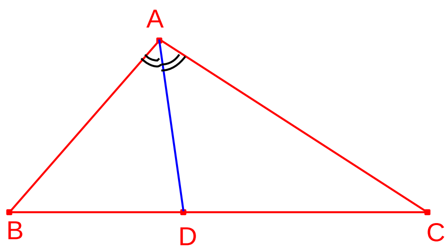
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(12+12k)(12-2k)(2+12k)(-2+12k)}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{6} + \frac{35\sqrt{3}}{6}$$

Resolent l'equació:

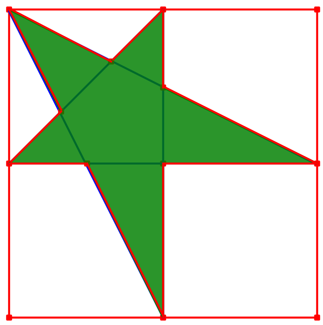
$$k = \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{21}}{6}$$

Si $k = \frac{2}{3}, \overline{BC} = 8$
Si $k = \frac{\sqrt{21}}{6}, \overline{BC} = 2\sqrt{21}$

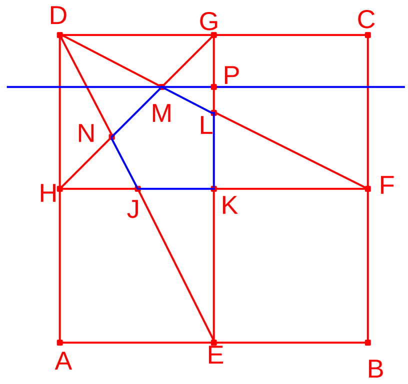




2772.- Quatre vèrtexs del pentàgon estrellat de la figura té els vèrtexs en els punts migs del quadrat exterior i l'altre vèrtex és un vèrtex del quadrat. Calculeu la proporció entre l'àrea del pentàgon i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre K.
Siguen E, F, G, H els punts migs dels costats del quadrat.



La intersecció de $\overline{DE}$ i $\overline{HK}$ és J el punt mig de $\overline{DE}$
La intersecció de $\overline{DF}$ i $\overline{GK}$ és L el punt mig de $\overline{DF}$
Siga $EKFGMDNHJ$ el polígon ombrejat.

El polígon $EKFGMDNHJ$ és simètric respecte de la diagonal $\overline{BD}$ del quadrat.
Siga P la projecció de M sobre $\overline{GK}$
Els triangles $\overset{\Delta}{LGM}, \overset{\Delta}{DHM}$ són semblants i de raó 1:2
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{MP} = \frac{1}{3}\overline{DG} = \frac{1}{6}$$

$$\overline{JK} = \frac{1}{2}, \overline{JF} = \frac{3}{4}$$

$$S_{DJF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$S_{EKJ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$S_{GLM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

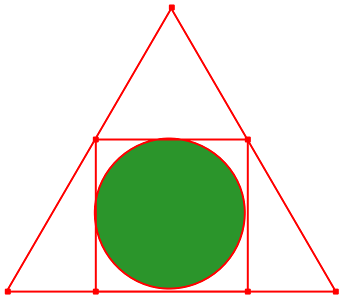
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{DJF} + S_{DJF} + 2\cdot S_{GLM} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{48} = \frac{7}{24}$$

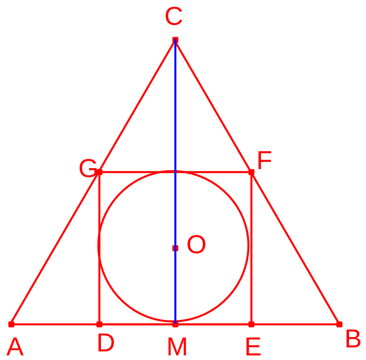
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{24}$$

2773.- En la figura, la circumferència de radi 1 està inscrita en el quadrat i el quadrat està inscrit en el triangle equilàter.
Calculeu l’àrea del triangle equilàter.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el quadrat $DEFG$ de centre O
$\overline{DE} = 2$
Aleshores:
$\overline{CG} = \overline{DE} = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADG}$:

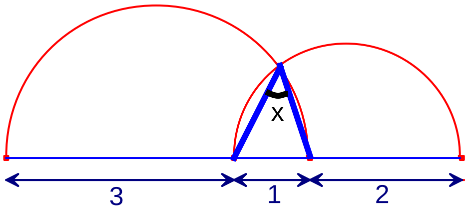
$$\overline{AG} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AC} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

L’àrea del triangle equilàter és:

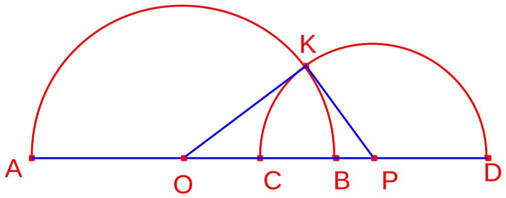
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{12 + 7\sqrt{3}}{3}$$

2774.- En la figura següent calculeu la mesura de l'angle x



Solució 1:
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 4$ i centre O.
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD} = 3$ i centre P.
Siga K la intersecció de les dues semicircumferències.
Siga $\angle KPO = \alpha$

$\overline{OK} = 2, \overline{PK} = \frac{3}{2}, \overline{OP} = \frac{5}{2}$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$4 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Siguen $\overline{CK} = a, \overline{BK} = b$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKP}$:

$a^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{9}{5}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BKP}$:

$b^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{8}{5}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKB}$:

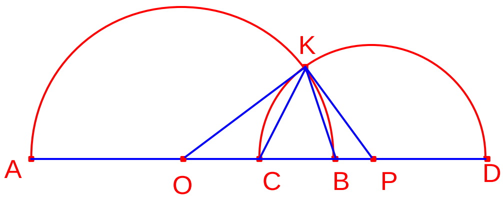
$1 = \frac{9}{5} + \frac{8}{5} - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \cos x$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 45°$

Solució 2:
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 4$ i centre O.
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD} = 3$ i centre P.
Siga K la intersecció de les dues semicircumferències.

$\overline{OK} = 2, \overline{PK} = \frac{3}{2}, \overline{OP} = \frac{5}{2}$



Pel teorema invers de Pitàogres el triangle $\overset{\Delta}{OKP}$ és rectangle $K = 90°$
Siga $\angle KPO = \alpha$, Siga $\angle KOP = 90° - \alpha$

El triangle $\overset{\Delta}{OKB}$ és isòsceles:

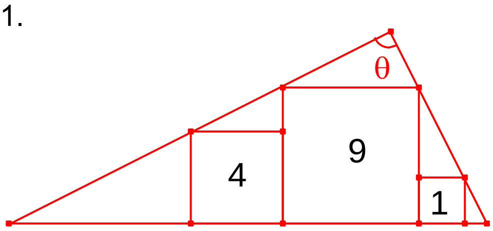
$\angle OBK = 45° + \frac{\alpha}{2}$

El triangle $\overset{\Delta}{CKP}$ és isòsceles:

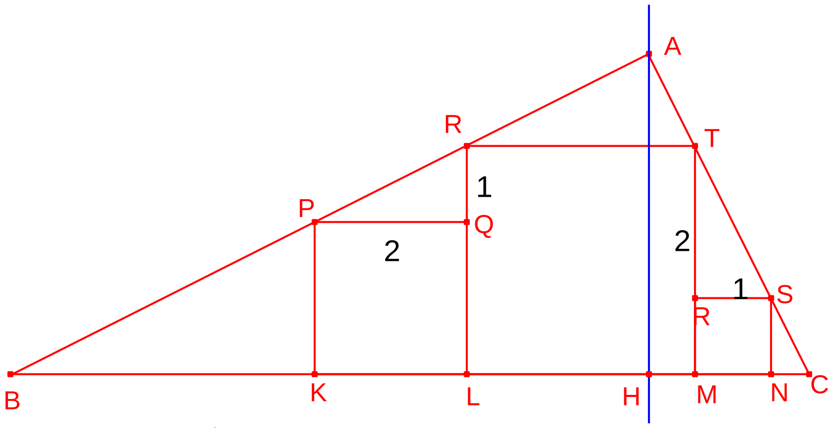
$\angle PCK = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$x = 180° - (\angle OBK + \angle PCK) = 180° - \left(45° + \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 45°$

2775.- En la figura hi ha tres quadrats d'àrees 4, 9, 1.
Calculeu la mesura de l'angle θ

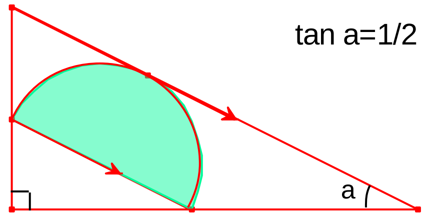


Solució:



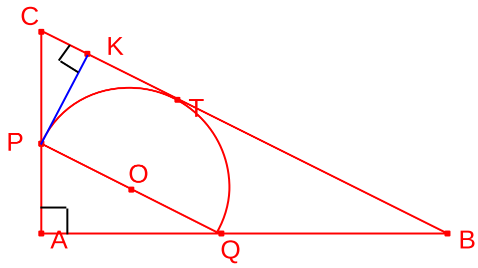
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \theta = \angle BAC$
Siga $KLQP$ el quadrat d'àrea 4, $\overline{PQ} = 2$
Siga $LMTR$ el quadrat d'àrea 9, $\overline{LR} = 3, \overline{RQ} = 1$
Siga MNSR el quadrat d'àrea 1, $\overline{RS} = 1, \overline{RT} = 2$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}, \overset{\Delta}{TRS}$ són iguals.
Siga N la projecció de A sobre $\overline{BC}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BHA}, \overset{\Delta}{AHC}$ són semblants.
Aleshores, $\theta = \angle BAC = 90°$

2776.- El triangle rectangle de la figura és tal que $\tan a = \frac{1}{2}$
El diàmetre de la semicircumferència és paral·lel a la hipotenusa.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del triangle.



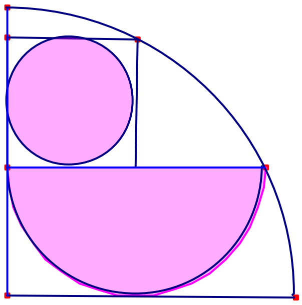
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90°, \overline{AC} = 1, \overline{AB} = 2$
Siga $\overline{PQ}$ diàmetre de la semicircumferència.
Siga $\overline{AP} = k, \overline{AQ} = 2k$

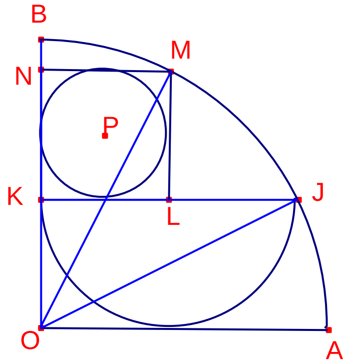


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQP}$:
$\overline{PQ} = k\sqrt{5}$
El radi de la semicircumferència és:
$$\overline{OQ} = \overline{OT} = \frac{\sqrt{5}}{2}k$$
Siga K la projecció de P sobre la hipotenusa $\overline{BC}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQP}, \overset{\Delta}{PFC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1-k}{k\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
Resolent l'equació:
$$k = \frac{4}{9}$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{9}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1} = \frac{10\pi}{81} \approx 0.3879$$

2777.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant.



Solució:
Siga el quadrant $\widehat{AB}$ de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la semicircumferència de centre L i diàmetre $\overline{KJ} = 2r$
Siga la circumferència inscrita en el quadrat $KLMN$ de centre P.
Siga $\overline{KN} = 2s$, s el radi de la circumferència.

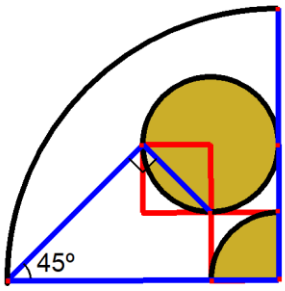


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKJ}$
$5r^2 = R^2$

$\overline{ON} = r + 2s, \overline{MN} = 2s, \overline{OM} = R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONM}$
$R^2 = 4r^2 + (r + 2s)^2$
$10s^2 + \sqrt{5}Rs - R^2 = 0$
$s = \frac{\sqrt{5}}{10}R$
Notem que $r = 2s$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{quadrant}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi s^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

2778.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant.



Solució:

Siga el quadrant $\widehat{AB}$ de centre O i radi $\overline{OA} = R$

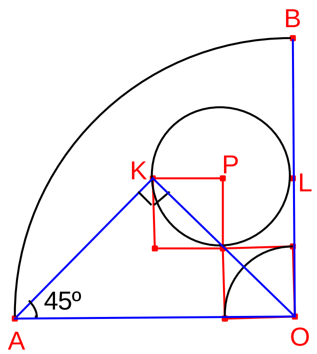
Siga la semicircumferència de centre L i diàmetre $\overline{KJ} = 2r$

$\overline{OK} = 2\sqrt{2}r$

El triangle $\overset{\Delta}{AKO}$ és rectangle i isòsceles.

$R^2 = 2\left(2\sqrt{2}r\right)^2$

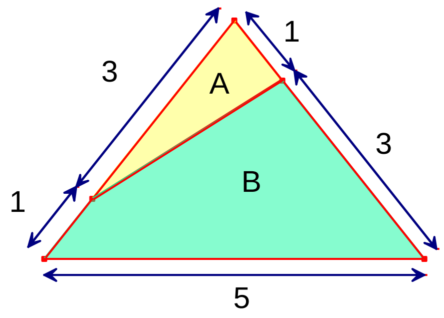
$16r^2 = R^2$



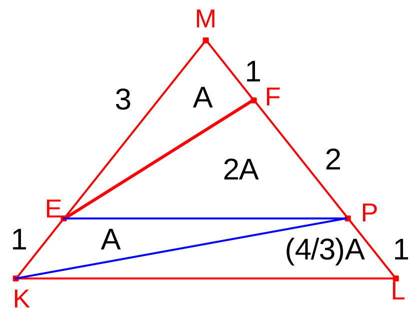
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{quadrant}} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2 + \pi r^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{16} + \frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{16}$$

2779.- En la figura calculeu la proporció d'àrees $\frac{A}{B}$



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

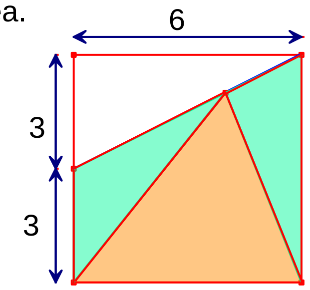


Siga el triangle $\overset{\Delta}{KLM}, \overline{KM} = \overline{LM} = 4, \overline{KL} = 5$
Siga E del costat $\overline{KM}$ tal que $\overline{KE} = 1, \overline{ME} = 3$
Siga F del costat $\overline{LM}$ tal que $\overline{MF} = 1, \overline{LF} = 3$
Siga P del costat $\overline{LM}$ tal que $\overline{LP} = 1, \overline{PF} = 2$

Siga $S_{EFM} = A$.
$S_{EPF} = 2A$
$S_{KEP} = A$
$S_{KLP} = \frac{1}{3} \cdot 4A$

$B = S_{KLFE} = 2A + A + \frac{4}{3}A = \frac{13}{3}A$
La proporció de les àrees és:
$\frac{A}{B} = \frac{A}{\frac{13}{3}A} = \frac{3}{13}$

2780.- Els dos triangles verds de la figura tenen igual àrea.
La figura exterior és un quadrat.
Calculeu l'àrea del triangle taronja.



Solució:
Siga el quadrat *ABCD* de costat $\overline{AB} = 6$
Siguen els triangles $\overset{\Delta}{AMK}, \overset{\Delta}{BCK}$ d'igual àrea.
Pel punt K tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla els costat $\overline{AD}, \overline{BC}$ en els punts P, Q, respectivament.
Aleshores:
$\overline{PK} = 2 \cdot \overline{QK}$
Per tant, $\overline{QK} = 2, \overline{PK} = 4$.
$S_{DMC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$
$S_{BCK} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és:
$S_{ABK} = S_{ABCD} - (S_{DMC} + 2 \cdot S_{BCK}) = 36 - (9 - 2 \cdot 6)$=15