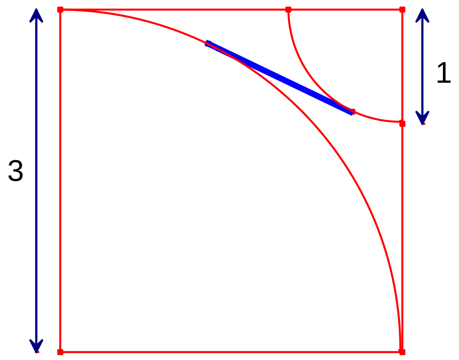
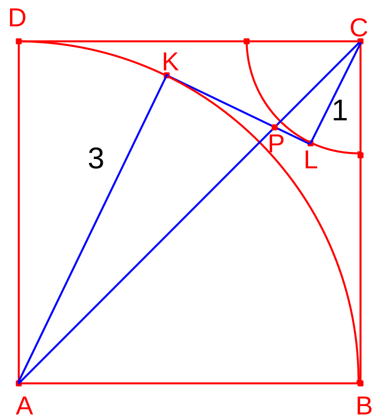
2781.- En els vèrtexs oposats d'un quadrat de costat 3 s'han dibuixat dos quadrants de radis 3 i 1, respectivament.
Calculeu la mesura del segment tangent als dos quadrats.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 3$
Siga el segment $\overline{KL}$ tangent al dos quadrant de centres A, C, respectivament.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 3\sqrt{2}$
$\angle AKL = \angle KLC = 90°$
Siga P la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{KL}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKP}, \overset{\Delta}{CLP}$ són semblants i de raó 3:1
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CP} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}, \overline{KL} = 4 \cdot \overline{PL}$$

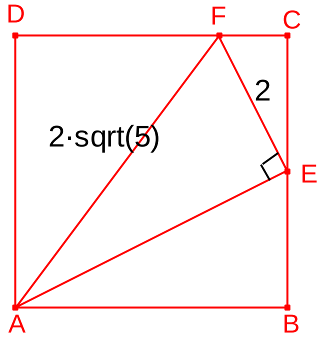
$$\overline{CP} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CLP}$:

$$\overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$, \overline{KL} = 4 \cdot \overline{PL} = \sqrt{2}$$

2782.- Siga el quadrat $ABCD$ i el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}, E = 90°, \overline{EF} = 2, \overline{AF} = 2\sqrt{5}$.
Calculeu l'àrea del quadrat $ABCD$.

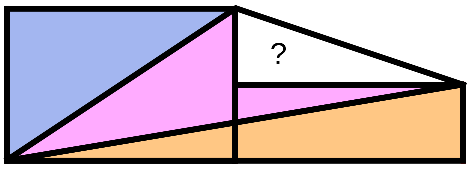


Solució:
Siga $\overline{AB} = c$, costat del quadrat $ABCD$.

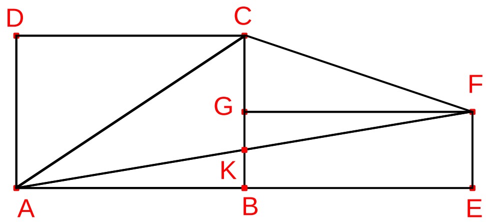
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}$:
$\overline{AE} = 4$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{ECF}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CE} = \frac{1}{2}c$
$\overline{CF} = \frac{1}{4}c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$:
$20 = c^2 + \frac{9}{16}c^2$
L'àrea del quadrat $ABCE$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = \frac{64}{5}$

2783.- Les tres zones ombrejades tenen àrea igual a 12. Calculeu l'àrea no ombrejada.



Solució:



Siga el rectangle ABCD $\overline{AB} = a, \overline{Ad} = b$

Siga el rectangle $BEFG$ $\overline{BE} = c, \overline{EF} = d$

L'àrea del polígon AFGC és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{FGK}$ són iguals.

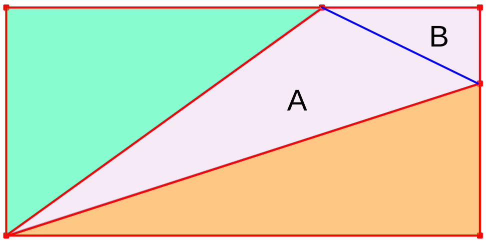
Aleshores, $a = c, \overline{BK} = \overline{GK} = \frac{1}{2}d$

$S_{ADC} = S_{AEG} = 12 = \frac{1}{2}ab$

Aleshores, $d = \frac{1}{2}b$

$S_{GFC} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab = 6$

2784.- Les tres àrees ombrejades del rectangle són iguals.
Calculeu la proporció $\frac{A}{B}$



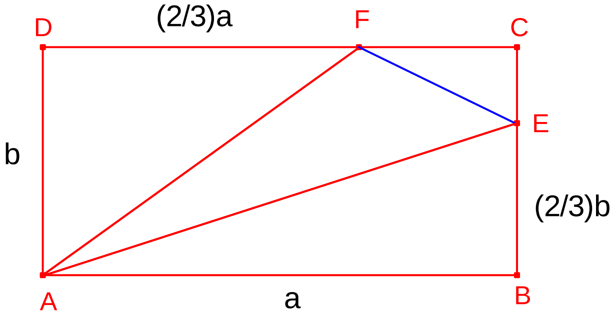
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ $\overline{AB}=a, \overline{AD}=b$

$$S_{ABE}=S_{AECF}=S_{ADF}=\frac{1}{3}ab$$

Aleshores:

$$\overline{BE}=\frac{2}{3}b, \overline{DF}=\frac{2}{3}a$$

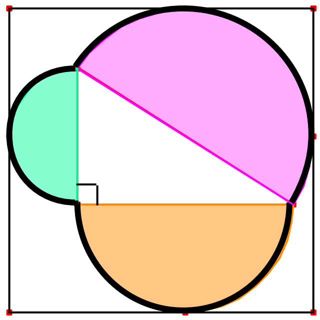
$$\overline{CE}=\frac{1}{3}b, \overline{CF}=\frac{1}{3}a$$



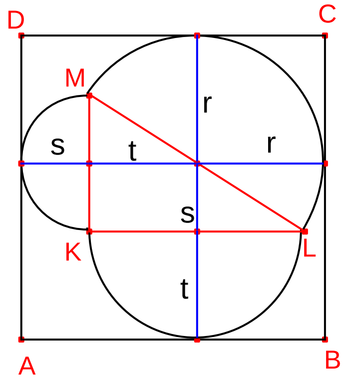
La proporció que cerquem és:

$$\frac{A}{B}=\frac{S_{AECF}-S_{ECF}}{S_{ECF}}=\frac{\frac{1}{3}ab-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}b}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}b}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}}=5$$

2785.- Sobre l’exterior dels costats d’un triangle rectangle s’han dibuixat tres semicircumferències que són tangents als costats d’un rectangle d’àrea 1.
Calculeu el perímetre de la suma de les tres semicircumferències.

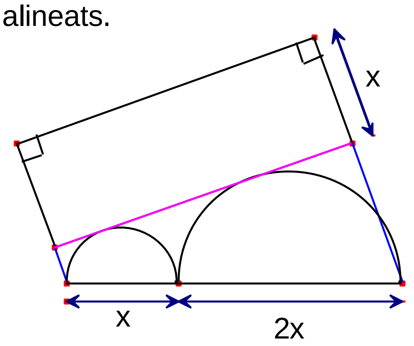


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ d’àrea 1.
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$ de costats $\overline{ML} = 2r, \overline{KM} = 2s, \overline{KL} = 2t$
Notem que $r + s + t = \overline{AB} = \overline{AD}$
Aleshores, $ABCD$ és un quadrat.
$r + s + t = 1$



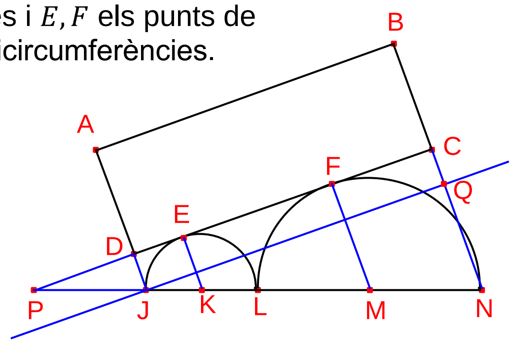
El perímetre de la suma de les tres semicircumferències:
$P = \pi(r + s + t) = \pi$

2786.- Els diàmetres de dues semicircumferències estan alineats.
El segment rosa és tangent a les semicircumferències.
Determineu l'àrea del rectangle de costat x.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AD} = x$
Siguen les semicircumferències de diàmetres, $\overline{JL} = x, \overline{LN} = 2x$

Siguen $\overline{CD}$ el segment tangent a les dues circumferències i E, F els punts de tangència Siga P el centre d'homotècia de les dues semicircumferències.



Siguen $\overline{DJ} = d, \overline{PJ} = b, \overline{CN} = y$
Aplicant el teorema de Tales als triangles rectangles semblants $\overset{\Delta}{PFM}, \overset{\Delta}{PEK}$:

$$\frac{x}{2x+b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}+b} = \frac{1}{3}$$

Aleshores, $b = x$

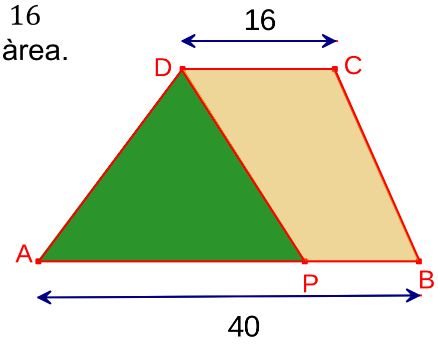
Aplicant el teorema de Tales als triangles rectangles semblants $\overset{\Delta}{PCN}, \overset{\Delta}{PFM}, \overset{\Delta}{PDJ}$:

$$\frac{y}{4x} = \frac{x}{3x} = \frac{d}{x}$$

Aleshores, $d = \frac{1}{3}x, y = \frac{4}{3}x$
Pel punt J tracem una paral·lela a $\overline{CD}$ que talla $\overline{CN}$ en el punt Q.
$\overline{QN} = y - d = x$

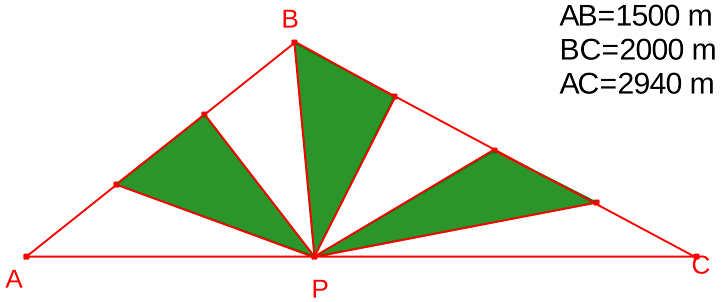
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JQN}$
$\overline{CD} = \overline{JQ} = 2\sqrt{2}x$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 2\sqrt{2}x^2$

2787.- Siga el trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{AB} = 40, \overline{CD} = 16$
Siga el punt P tal que $\overline{DP}$ divideix el trapezi en dos parts d'igual àrea.
Calculeu $\overline{AP}$.



Solució:
$\overline{AP} = x, \overline{BP} = 40 - x$
Siga h l'altura del trapezi.
Les àrees del triangle $\overset{\Delta}{APD}$ i del trapezi $PBCD$ són iguals:
$\frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}(40 - x + 16)h$
$x = 56 - x$
$x = 28$

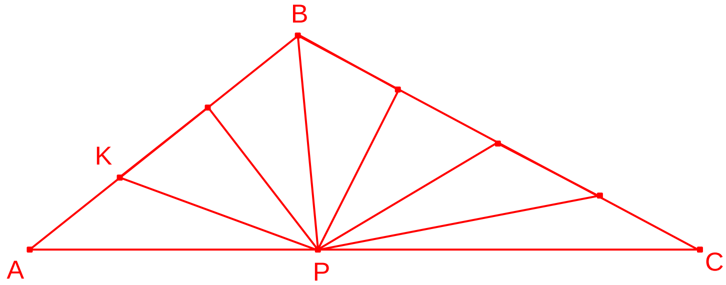
2788.- Volem dividir un camp triangular $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 1500\ m, \overline{BC} = 2000\ m, \overline{AC} = 2940\ m$ amb set parts triangulars d'igual àrea de tal manera que totes les parts contenen el punt P sobre $\overline{AC}$ i les bases dels set triangles sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ siguen iguals. Calculeu on està situat els punts P.



Solució:

Les bases dels set triangles són iguals:

$\overline{AK} = 500$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 2940 \cdot \sin A$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APK}$ és:

$$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot \overline{AP} \cdot \sin A$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APK}$ és la setena part de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{1}{2} \cdot 500 \cdot \overline{AP} \cdot \sin A = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 2940 \cdot \sin A\right)$$

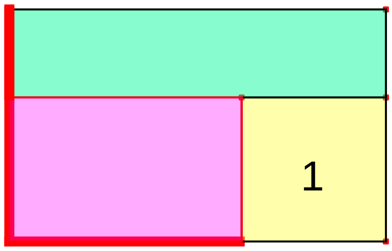
Simplificant:

$\overline{AP} = 1260\ m$

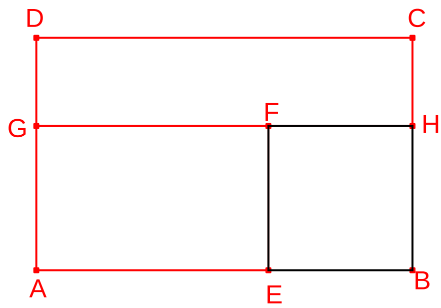
Notem que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{3}{7}$$

2789.- En la figura, el rectangle s’ha dividit en un quadrat d’àrea 1, dos rectangles (verd, morat) d’igual àrea.
Els segments de roig són iguals.
Calculeu la mesura de cadascun dels segments.



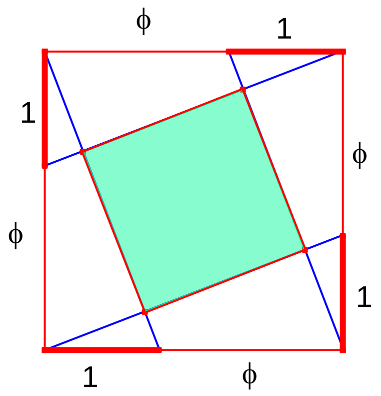
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el quadrat $EBHG$ de costat $\overline{BE} = 1$
Siguen $\overline{AE} = \overline{AD} = a$
$\overline{CH} = a - 1$
Siguen els rectangles $AEFF, GHCD$ d’igual àrea.



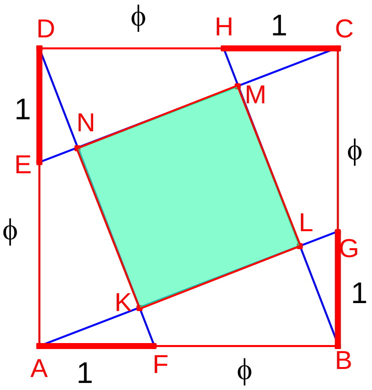
$a \cdot 1 = (a+1)(a-1)$
Simplificant:
$a^2 - a - 1 = 0$
$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Una propietat del nombre d’or:
$(\Phi + 1)(\Phi - 1) = \Phi$

2790.- Els costats del quadrat exterior quadrat exterior s’han dividit en segments de longitud $1, \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
Calculeu l’àrea del quadrat interior ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1 + \Phi$
Siguen els punts E, F, G, H tal que $\overline{DE} = \overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = 1$
Siga $KLMN$ el quadrat interior.



Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$\overline{CE} = \sqrt{1 + \Phi^4} = \sqrt{3}\Phi$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{CMH}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MH}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}\Phi}, \qquad \overline{MH} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\Phi - 1)$$

$$\frac{\overline{CM}}{1+\Phi} = \frac{1}{\sqrt{3}\Phi}, \quad \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}\Phi$$

$\overline{EN} = \overline{MH}$

$$\overline{ML} = \overline{CE} - (\overline{CM} + \overline{EN}) = \sqrt{3}\,\Phi - \frac{\sqrt{3}}{3}(\Phi + \Phi - 1) = \frac{\sqrt{3}}{3}\Phi^2$$

L’àrea del quadrat KLMN és:

$$S_{KLMN} = \overline{ML}^2 = \frac{1}{3}\Phi^4 = \frac{2}{3} + \Phi \approx 2{,}2847$$

$$S_{ABCD} = \Phi^4$$

La proporció entre les àrees dels dos quadrats és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}\Phi^4}{\Phi^4} = \frac{1}{3}$$