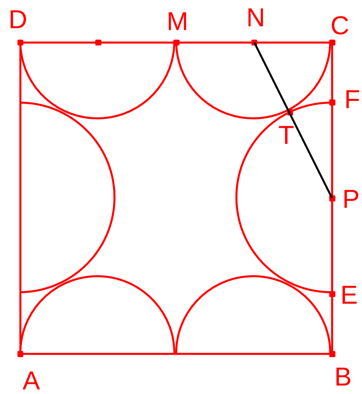
Problemes de Geometria per a l'ESO 28

271.- Calculeu l'àrea total dels 6 semicercles ombrejats del quadrat de costat 4.
Proves Cangur 2001, nivell3. Problema 28.

Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat 4
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga N el centre del semicercle de diàmetre $\overline{CM}$.
Siga P el centre del semicercle de diàmetre $\overline{EF}$.
P és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
El segment $\overline{PN}$ passa pel punt T de tangència dels dos semicercles.
$\overline{CN} = \overline{NT} = 1$, $\overline{CP} = 2$.

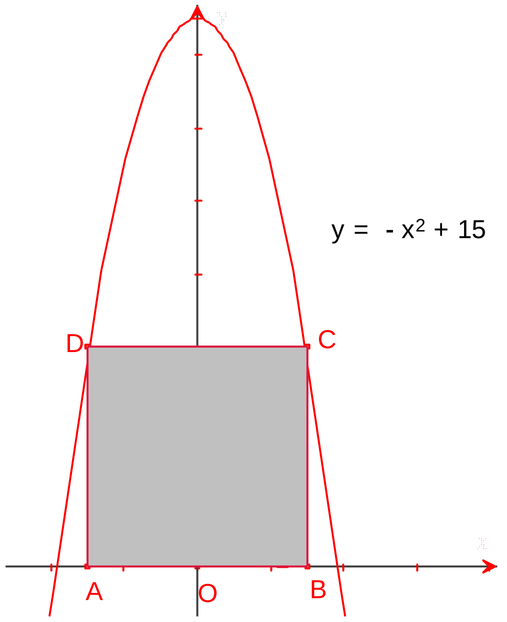


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCN}$:
$\overline{PN} = \sqrt{5}$.
El radi del semicercle de centre P és:
$\overline{PT} = \overline{PN} - \overline{NT} = \sqrt{5} - 1$.
L'àrea dels 6 semicercles és:

$$S = 4\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{2}\right) + 2\left(\frac{\pi\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2}\right) = \left(8 - 2\sqrt{5}\right)\pi .$$

272.- Dos vèrtexs consecutius d'un quadrat estan situats a l'eix d'abscisses i els altres dos en punts de la gràfica de la funció $y = 15 - x^2$, un d'ells al primer quadrant. Quina és l'àrea d'aquest quadrat?

Proves Cangur 2002, nivell 3. Problema 30.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = \overline{BC} = 2a$.

$\overline{OB} = a$.

Com que el punt C pertany a la paràbola $y(a) = 15 - a^2$.

Aleshores, $\overline{BC} = 15 - a^2$.

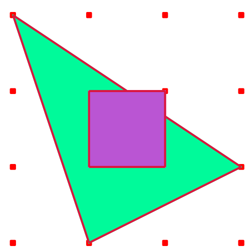
$15 - a^2 = 2a$.

Resolent l'equació $a = 3$.

L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = (2a)^2 = 6^2 = 36$.

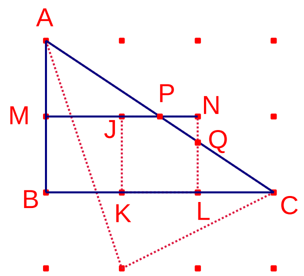
273.- La distància en horitzontal o en vertical entre dos punts de la graella adjunta és 1. Quina és l'àrea de la part comuna al triangle i al quadrat?
Proves Cangur 2002, nivell 3. Problema 27.



Solució:

Siguen A i Q les interseccions del quadrat JKLN i el segment $\overline{AC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AMP}$ són semblants i la raó de semblança 2:1.



Aleshores $\overline{MP} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{3}{2}$.

$\overline{JP} = \overline{MP} - \overline{MJ} = \frac{1}{2}$.

$\overline{PN} = \frac{1}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMP}$, $\overset{\Delta}{QNP}$ són semblants i la raó de semblança 3:1 ja que $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$.

Aleshores, $\overline{NQ} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{1}{3}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QNP}$ és:

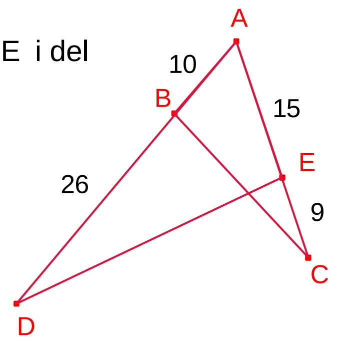
$$S_{QNP} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}.$$

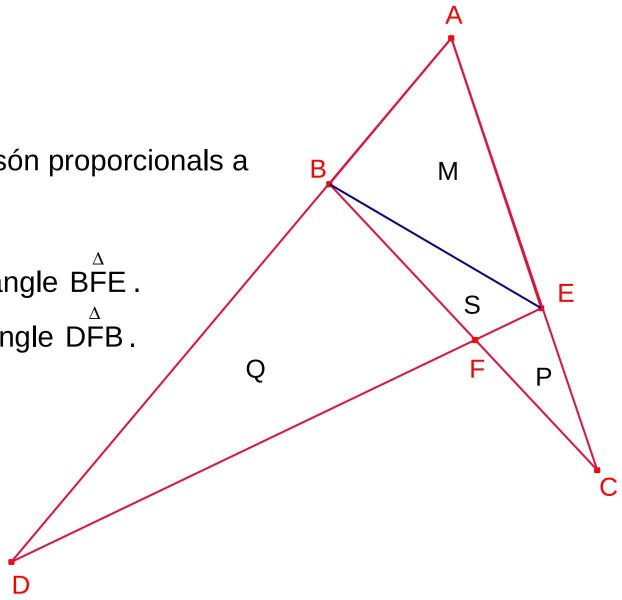
L'àrea de la part comuna al triangle i al quadrat del problema és igual a l'àrea del quadrat menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QNP}$.

$$S = 1^2 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

274.- Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Proves Cangur 2003, nivell 3. Problema 21.





Solució 1:

Siga F la intersecció dels segments $\overline{BC}$, $\overline{DE}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga M l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$. Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BFE}$.

Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFE}$. Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DFB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CEB}$, $\overset{\Delta}{EAB}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{P+S}{M}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Aleshores, $P+S=\frac{3}{5}M$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEB}$, $\overset{\Delta}{EAB}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{Q+S}{M}=\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}.$$

Aleshores, $Q+S=\frac{3}{5}M$.

Determinem la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{Q+S+M}{P+S+M}=\frac{\frac{15}{3}M+M}{\frac{3}{5}M+M}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

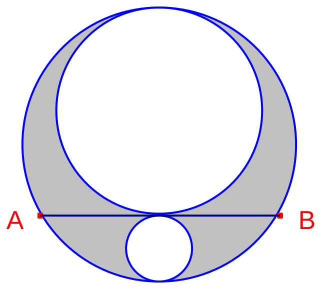
Solució 2:

Siga $\alpha=\angle CAD$.

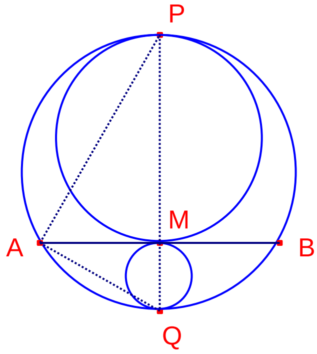
Utilitzem la fórmula trigonomètrica de l'àrea d'un triangle:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AE}}{2}\sin\alpha}{\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\sin\alpha}=\frac{36\cdot 15}{10\cdot 24}=\frac{9}{4}.$$

275.- L'àrea ombrejada de la figura és igual a 2π.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$
Proves Cangur 2004, nivell 3. Problema 29.



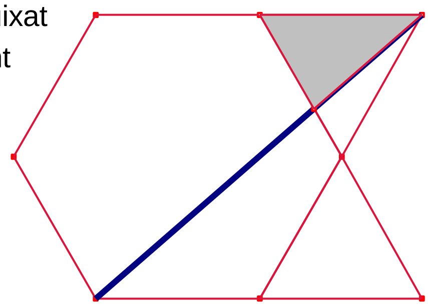
Solució:
Siga R el radi de la circumferència exterior.
Siga r el radi de la circumferència gran tangent interior.
Siga s el radi de la circumferència menuda tangent interior.
$R = r + s$.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del cercle de radi R menys la suma de les àrees dels cercles de radis r i s.



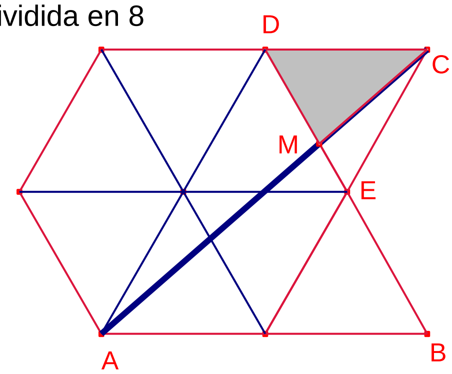
$\pi R^2 - \left(\pi r^2 + \pi s^2\right) = 2\pi$.
Simplificant:
$R^2 - r^2 - s^2 = 2$.
$(r+s)^2 - r^2 - s^2 = 2$. Simplificant:
$rs = 1$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$ que és el punt de tangència de les dues circumferències interiors.
El triangle $\overset{\Delta}{PAQ}$ és rectangle ja que l'angle A abraça mitja circumferència de radi R.
$\overline{AM}$ és perpendicular a $\overline{PQ}$.
Aplicant el teorema de l'altura d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAQ}$:
$\overline{AM}^2 = \overline{PM} \cdot \overline{QM}$.
$\overline{AM}^2 = 2r \cdot 2s = 4rs = 4$.
Aleshores, $\overline{AM} = 2$.
$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 4$.

276.- Amb 10 segments de la mateixa longitud hem dibuixat la figura adjunta, que té una àrea total de $24cm^2$ (sumant la de l'hexàgon regular i la dels dos triangles equilàters). Després, hem traçat el segment gruixut que uneix dos vèrtexs de la figura.
Quina és l'àrea del triangle ombrejat?
Proves Cangur 2005, nivell. Problema 30.



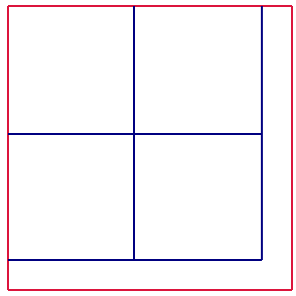
Solució:
La figura traçant les diagonals de l'hexàgon regular ha quedat dividida en 8 triangles equilàters iguals (6 formen l'hexàgon).
Cadascun d'aquests triangles té àrea $\frac{24}{8}cm^2$.



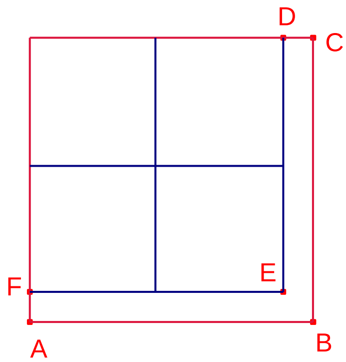
Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{CDM}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1.
Siga $x = \overline{DM}$.
Aleshoes, $\overline{BM} = 2x$, $a = \overline{DE}$.
$\overline{BM} = \overline{BD} - \overline{DM} = 2a - x$.
Aleshores, $2x = 2a - x$. Resolent l'equació en x:
$x = \frac{2}{3}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overset{\Delta}{DMC}$ tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases:
$\frac{S_{DMC}}{S_{DEC}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DE}}$.
$\frac{S_{DMC}}{3} = \frac{x}{a} = \frac{2}{3}$.
Aleshores, $S_{DMC} = 2$.

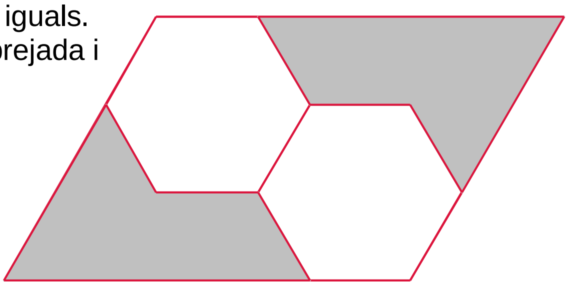
277.- Un quadrat d'àrea $125cm^2$ està descompost en cinc parts de la mateixa àrea: quatre quadrats i una figura en forma de L, com es pot veure a la figura.
Calculeu el perímetre de la figura en forma de L
Proves Cangur 2006, nivell 3. Problema 16.



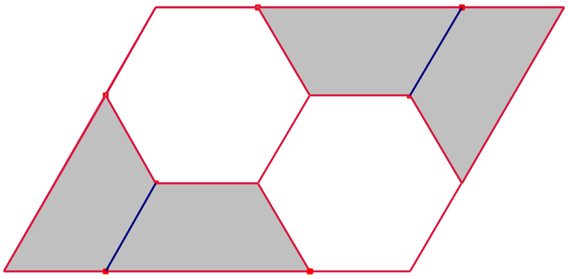
Solució:
Cadascuna de les 5 figures descompostes del quadrat gran té àrea $25cm^2$.
Aleshores, el costat dels 4 quadrat menuts és 5cm.
Siga $x = \overline{AF} = \overline{CD}$.
$\overline{FE} = \overline{DE} = 10$.
L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és:
$S_{ABCDEF} = x^2 + 20x$
$x^2 + 20x = 25$.
Resolent l'equació:
$x = 5\left(\sqrt{5} - 2\right)$.
El perímetre de l'hexàgon ABCDEF és:
$P_{ABCDEF} = 2\left(\overline{AB} + \overline{FE}\right) = 2(10 + x + 10) = 20\sqrt{5}$.



278.- En la figura, els dos hexàgons regulars són iguals. Quina és la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i la del paral·lelogram exterior.
Proves Cangur 2008, nivell 3. Problema 15.

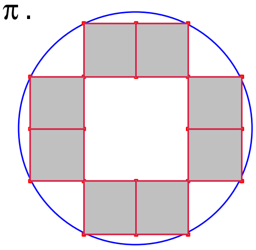


Solució:

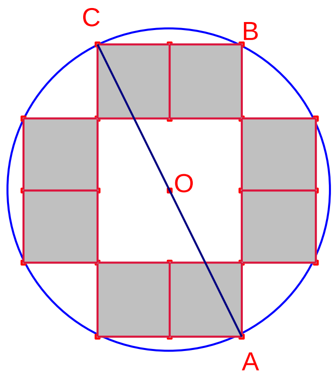


$$\frac{1}{2}$$

279.- En el dibuix del costat hi ha 9 quadrats dins d'un cercle d'àrea π. Quina és l'àrea de la regió ombrejada?.
UKMT. UK INTERMEDIATE MATHEMATICAL CHALLENGE, 2010. Problema 23.

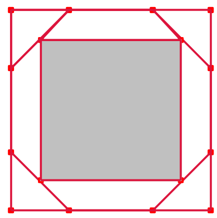


Solució:
Calculem el radi del cercle d'àrea π.
$\pi r^2 = \pi$. Resolent l'equació:
$r = 1$.

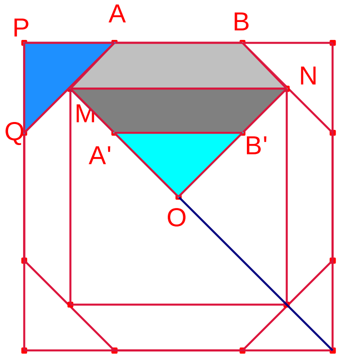


Siga O el centre del cercle.
Siga c la mesura dels costats menuts.
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $B = 90^o$.
$\overline{AB} = 4c$, $\overline{BC} = 2c$.
$\overline{AC} = 2$, per ser un diàmetre del cercle.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$(2c)^2 + (4c)^2 = 2^2$.
Simplificant, $c^2 = \frac{1}{5}$.
L'àrea ombrejada està formada per 8 quadrats de costat c.
$S_{ombrejada} = 8c^2 = \frac{8}{5}$.

280.- Un octògon regular està inscrit en un quadrat.
En els punts mig de l'octògon s'ha dibuixat un altre quadrat.
Calculeu la raó entre les àrees dels dos quadrats.
UKMT. UK INTERMEDIATE MATHEMATICAL CHALLENGE, 2011.
Problema 21.



Solució:



Siga A' el simètric de A respecte de la recta MN
Siga B' el simètric de B respecte de MN.
Els quadrilàters ABMN, A'B'NM són iguals.

$\overline{A'B'} = \overline{AB}$ aleshores, els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{A'B'O}$ són iguals.
Aleshores, la proporció entre les àrees del quadrat interior i exterior és 1:2.