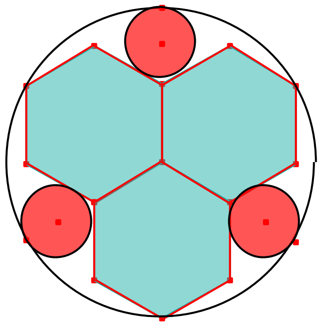
2791.- En una circumferència de radi R hi ha inscrits tres hexàgons regulars iguals i tres circumferències, cadascuna d'elles tangent a la circumferència exterior i a dos costats de dos hexàgons. Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Gunma. Satimiya Shrine, 1824



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga $\overline{ON} = \frac{1}{2}R$ costat de l'hexàgon regular.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = r$, M el punt de tangència de les circumferències de centre O, P.
Siga KL la tangent comuna a les dues circumferències.

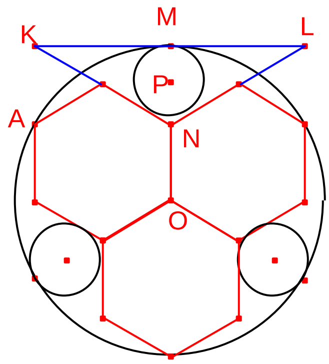
$$\overline{MN} = \frac{1}{2}R, \overline{NK} = R, \overline{KL} = \sqrt{3}R$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLN}$ és:

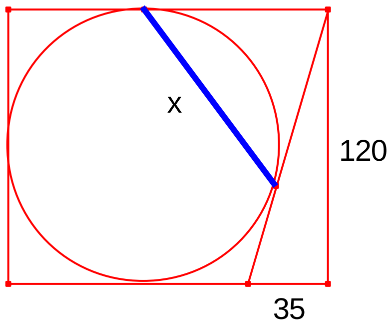
$$S_{KLN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{3}R = \frac{1}{2}\left(2R + \sqrt{3}R\right)r$$

Resolent l'equació:

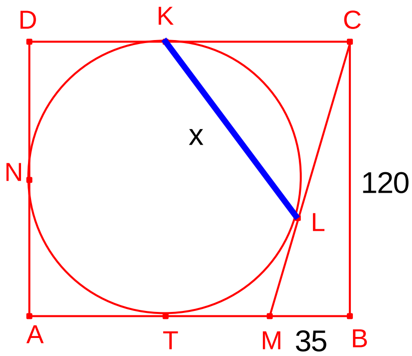
$$r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} R$$



2792.- En la figura, una circumferència és tangent a tres costats d'un rectangle i a un segment.
Calculeu la mesura del segment x

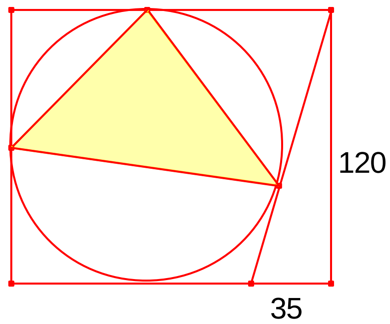


Solució:
Siga el rectangle $ABCD, \overline{BC} = 120$
Siguen K, L, T, M els punts de tangència de la circumferència i els costats $\overline{Dd}, \overline{CM}, \overline{AB}, \overline{AD}$, respectivament.
Siga $x = \overline{KL}, \overline{BM} = 35$

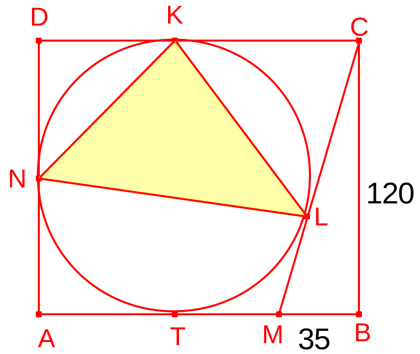


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBM}$:
$\overline{CM} = 125$
$\overline{DK} = \overline{AN} = \overline{AT} = 60$
Siga $\overline{TM} = \overline{LM} = a, \overline{CK} = \overline{CL} = 125 - a$.
$60 + 125 - a = 60 + a + 35$
$a = 45, \overline{CK} = \overline{CL} = 80$
Siga $\angle KCL = \alpha$
$$\cos\alpha = \frac{35}{125} = \frac{7}{25}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKL}$
$$x^2 = 80^2 + 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 80E \cdot \frac{7}{25}$$
$x = 96$

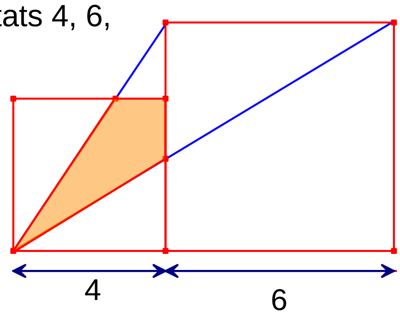
2793.- En la figura, una circumferència és tangent a tres costats d'un rectangle i a un segment.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD, \overline{BC} = 120$
Siguen K, L, T, M els punts de tangència de la circumferència i els costats $\overline{Dd}, \overline{CM}, \overline{AB}, \overline{AD}$, respectivament. Siga $\overline{BM} = 35$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBM}$:
$\overline{CM} = 125$
$\overline{DK} = \overline{AN} = \overline{AT} = 60$
Siga $\overline{TM} = \overline{LM} = a, \overline{CK} = \overline{CL} = 125 - a$.
$60 + 125 - a = 60 + a + 35$
$a = 45, \overline{CK} = \overline{CL} = 80$
Siga $\angle KCL = \alpha$
$$\cos\alpha = \frac{35}{125} = \frac{7}{25}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKL}$
$$\overline{KL}^2 = 80^2 + 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 80E \cdot \frac{7}{25}$$
$\overline{KL} = 96$
$\overline{KN} = 60\sqrt{2}$
$\angle KLN = 45°$
$\overline{KN} = 60\sqrt{2}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KLN}$
$$\left(60\sqrt{2}\right)^2 = 96^2 + \overline{LN}^2 - 2 \cdot 96 \cdot \overline{LN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$\overline{LN} = 84\sqrt{2}$
$$S_{KLN} = \frac{1}{2} \cdot 84\sqrt{2} \cdot 96 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4032$$
$S_{ABCD} = 120 \cdot 140 = 16800$
$$\frac{S_{KLN}}{S_{ABCD}} = \frac{4032}{16800} = \frac{6}{25}$$



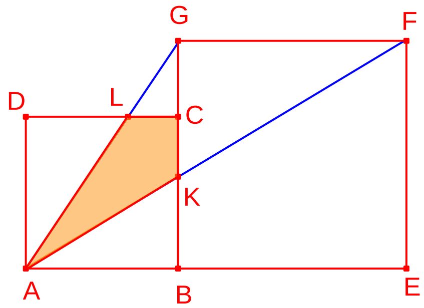
2794.- Donats els dos quadrats adossats de costats 4, 6, calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$ de costats $\overline{AB} = 4, \overline{BE} = 6$, respectivament.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABG}, \overset{\Delta}{LDA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{DL} = \frac{8}{3}$

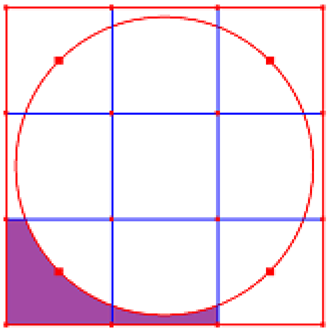
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADF}, \overset{\Delta}{ABK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BK} = \frac{12}{5}$



L'àrea del quadrilàter $AKCL$ és:

$$S_{AKCL} = S_{ABCD} - S_{ADL} - S_{ABK} = 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{88}{15}$$

2795.- En la figura, un quadrat s'ha dividit en nou quadrtats de costat 1.
El centre del quadrat és el centre de la circumferància que passa pels centres dels quadrats dels cantons.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

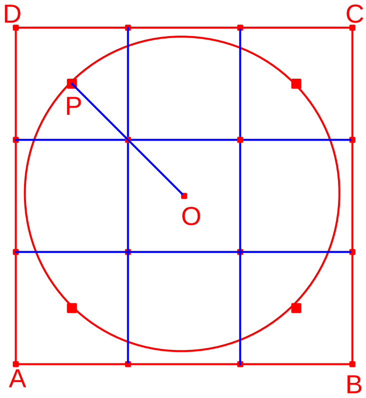


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 3$ i centre O.
Siga P el centre del quadrat de costat 1.

$\overline{OP} = \overline{OD} - \overline{PD} = \frac{\sqrt{2}}{2}3 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

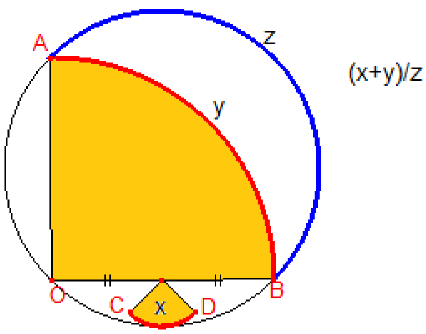
L'àrea ombrejada és la quarta part de l'àrea del quadrat $ABCD$ menys l'àrea del cercle.

$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\left(3^2 - \pi\left(\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{9-2\pi}{4}$



2796.- Donats dos quadrants de longituds x, y i l'arc z de la circumferència, calculeu:

$$\frac{x+y}{z}$$



Solució:
L'arc z és un semicercle de centre P.
Siga $\overline{PA} = R$ el radi.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$.
$\overline{OA} = R\sqrt{2}$, radi del quadrant gran.
Siga M el punt mig del segment $\overline{OB}$.

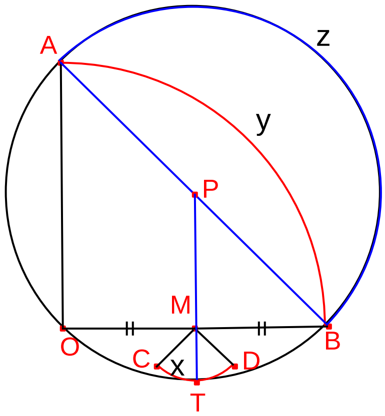
$\overline{PM}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$, aleshores:

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

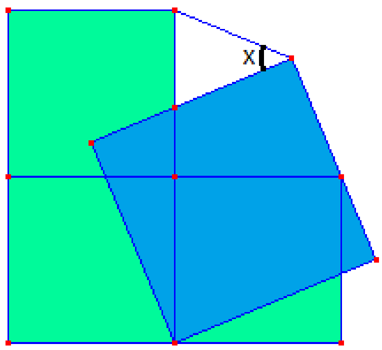
$$\overline{MT} = \overline{PT} - \overline{PM} = R - \sqrt{2}R$$

La proporció que cerquem és:

$$\frac{x+y}{z} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot R\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot \left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)}{\frac{1}{2}\cdot 2\pi R} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

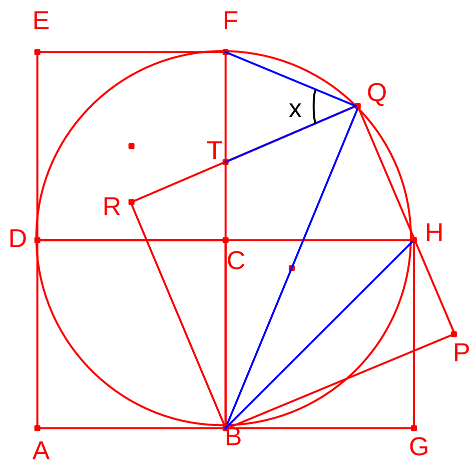


2797.- En la figura hi ha tres quadrats iguals de color verd i un quadrat més gran de color blau. Calculeu la mesura de l'angle x

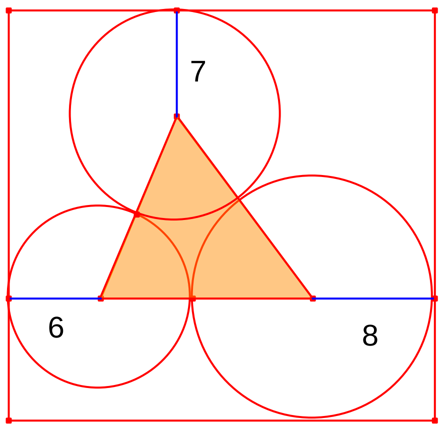


Solució:
Siguen els quadrats iguals $ABCD, CDEF, BGHC$.
Siga el quadrat $BPQR$.
Siga $\angle FQT = x$

Siga $\angle RBT = \alpha$
$\angle QBH = \alpha$
$\angle BFH = 45° - \alpha$
$\angle RBT = 135° - \alpha$
$\angle BQH = 45°$
$\angle BQH = 45°$
Aleshores Q pertany a la circumferència que passa pels punts F, H, B, circumferència de centre C.
$\angle FQB = 90°$
$x = \angle FQT = 90° - 45° = 45°$



2798.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea el rectangle exterior.



Solució:

Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB} = 28$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{KLM}, \overline{KL} = 14, \overline{KM} = 13, \overline{LM} = 15$

Siga $\overline{MH} = h$ altura del triangle.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{42 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 16}}{4} = 84$$

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h = 84.$$

$h = 12$

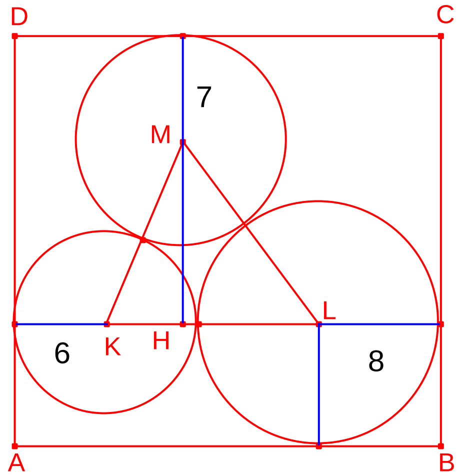
$\overline{AD} = 8 + 7 + h = 27$

L'àrea del rectangle ABCD és:

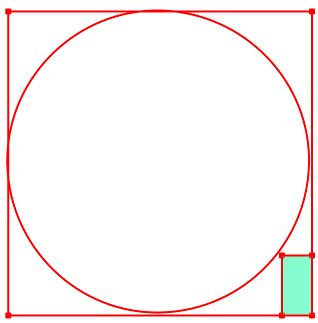
$S_{ABCD} = 28 \cdot 27 = 756$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABCCD}} = \frac{84}{756} = \frac{1}{9}$$



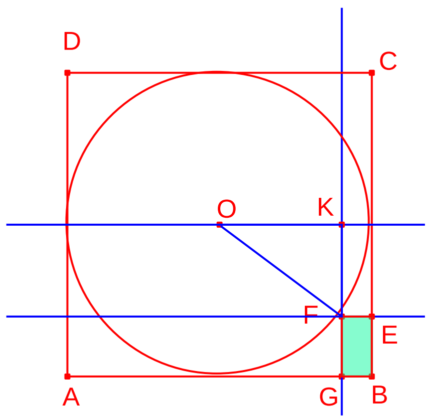
2799.- Una circumferència està inscrita en un quadrat i un rectangle té un vèrtex en la circumferència i el vèrtex oposat és un vèrtex del quadrat. L'ample del rectangle és el doble que el llarg.
Calculeu la proporció entre l'àrea del rectangle i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga el rectangle $BEFG$ de costats $\overline{BG} = a, \overline{BE} = 2a$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OFK}$

$\overline{OF} = \frac{1}{2}c, \overline{OK} = \frac{1}{2}c - a, \overline{FK} =$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OFK}$:

$$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c - 2a\right)^2$$

Simplificant:

$$20a^2 - 12ca + c^2 = 0$$

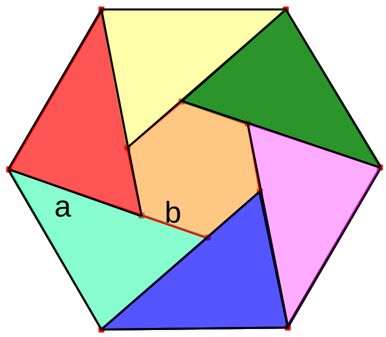
Resolent l'equació:

$$a = \frac{1}{10}c$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{BEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{2a \cdot a}{c^2} = \frac{1}{50}$$

2800.- Les set regions de la figura tenen la mateixa àrea. Calculeu $\frac{a}{b}$



Solució:

Siga $\overline{AD} = \overline{BC} = a, \overline{CD} = b$

$\angle BCA = 60°$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i l'àrea de l'hexàgon regular $CDEFGH$ són iguals.

$$\frac{1}{2}(a+b)a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

Simplificant:

$$a^2 + ab - 6b^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\frac{a}{b} = 2$$