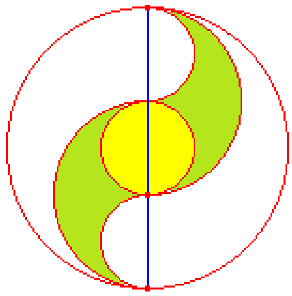
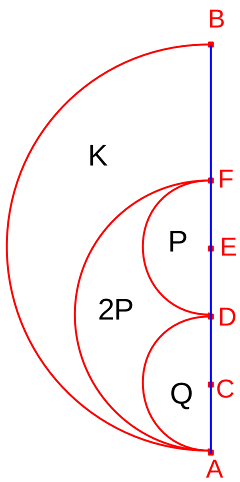
2801.- La circumferència groga i l'exterior són concèntriques.
En la figura, la zona verda és el doble de la zona groga.
Quina fracció del total té la zona ombrejada?

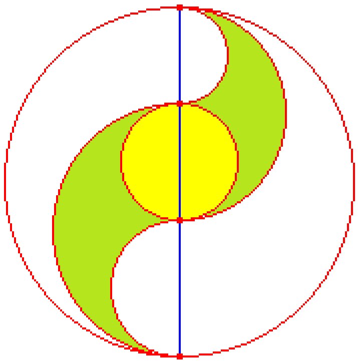


Solució:
Siga P l'àrea del semicercle de radi $\overline{DE} = s$
Siga Q l'àrea del semicercle de radi $\overline{AC} = r$
El radi del semicercle exterior és $\overline{AE} = 2r + s$.
la zona verda és el doble de la zona groga:
$$\frac{1}{2}\pi(r+s)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi s^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi s^2$$
Simplificant:
$r = s$

La proporció que cerquem és:
$$\frac{3P}{3P+Q+K} = \frac{3 \cdot s^2}{(2r+s)^2} = \frac{3 \cdot s^2}{(3s)^2} = \frac{1}{3}$$

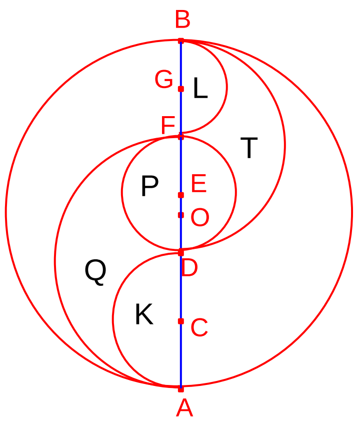


2802.- En la figura, la zona verda és el doble de la zona groga.
Quina fracció del total té la zona ombrejada?



Solució:
Siga P l'àrea del semicercle de radi $\overline{DE} = s$
Siga Q l'àrea del semicercle de radi $\overline{AC} = r$
Siga L l'àrea del semicercle de radi $\overline{FG} = t$
El radi del semicercle exterior és $\overline{AO} = r + s + t$.
Siga S l'àrea del cercle de radi $\overline{AO}$.
la zona verda és el doble de la zona groga:
$Q + T = 4P$

$$\frac{1}{2}\pi(r+s)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi s^2 + \frac{1}{2}\pi(t+s)^2 - \frac{1}{2}\pi t^2 - \frac{1}{2}\pi s^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\pi s^2$$

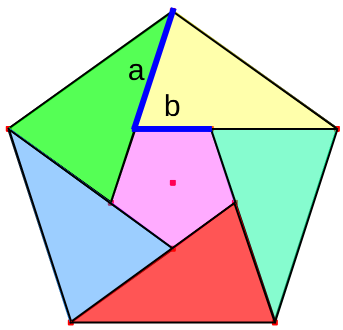


Simplificant:
$r + t = 2s$

La proporció que cerquem és:

$$\frac{6P}{S} = \frac{6 \cdot s^2}{2(r+s+t)^2} = \frac{3 \cdot s^2}{(3s)^2} = \frac{1}{3}$$

2803.- El pentàgon regular de la figura s'ha dividit en cinc triangles i un pentàgon regular.
Les sis regions tenen la mateixa àrea. Calculeu $\frac{a}{b}$

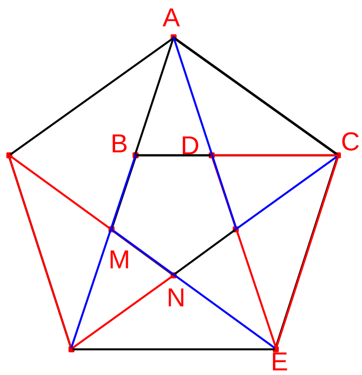


Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = a$
Siga D el costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = b, \overline{BC} = a + b$
A, B, M estan alineats.
Aleshores, M, N, E estan alineats, $\overline{EM} = \overline{BC} = a + b$
$\angle BMN = 108°, \angle ABC = 72°$
$\angle MAE = 36°$

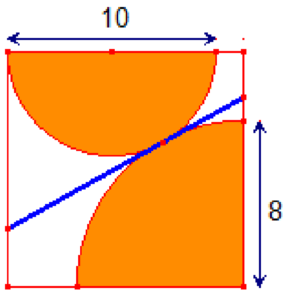
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles i auri.
Aleshores:

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

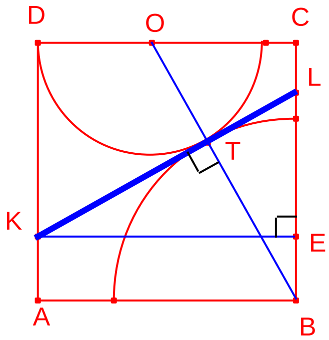


Notem que les àrees dels dos pentàgons regulars estan en proporció $1:5$

2804.- Un semicercle i quadrant de cercle dins d'un quadrat.
Calculeu la mesura del segment de tangència interior al quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga O el centre de la semicircumferència de diàmetre 10
Siga T el punt de tangència.
$\overline{OB} = 5 + 8 = 13$
Siga $\overline{KL}$ el segment de tangència de la semicircumferència i el quadrant.



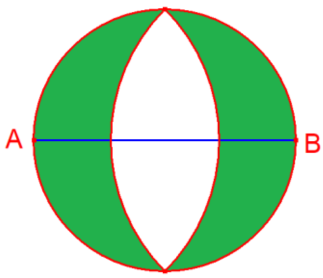
Els segment $\overline{OB}, \overline{KT}$ són perpendiculars.
Siga E la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$
$\angle LKE = TBL$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCO}, \overset{\Delta}{KEL}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{KL} = \overline{OB} = 13$

Calculem el costat del quadrat
Siga $x = \overline{AB} = \overline{BC}$
$OC = x - 5$

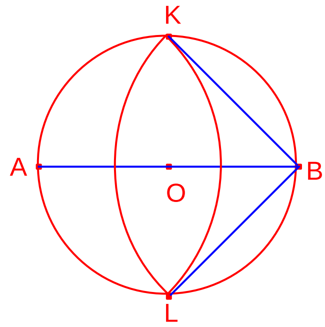
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCO}$:
$13^2 = x^2 + (x - 5)^2$
$x^2 - 5x - 72 = 0$
$$x = \frac{5 + \sqrt{313}}{2}$$

2805.- Siga una circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2$ i dos arcs iguals de centre A, B.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

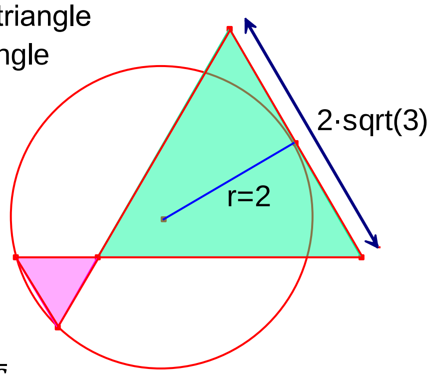


Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
Siguen K, L la intersecció dels dos arcs de centre A, B
$\angle LBK = 90°$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KOB}$
$\overline{BK} = \sqrt{2}$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2\left(\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\right) = 2$$

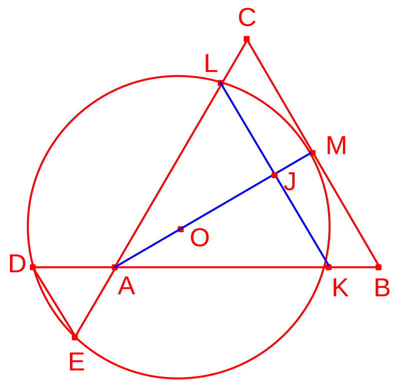


2806.- Donada una circumferència de radi $r = 2$ s'ha dibuixat un triangle equilàter verd tangent a la circumferència i de costat $2\sqrt{3}$ i un triangle morat.
Calculeu la proporció entre les àrees verda i morada.



Solució:

Siga el triangle equilàter verd $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$.
Siga O el centre de la circumferència i M el punt mig del costat $\overline{BC}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:
$\overline{AM} = 3, \overline{OA} = 1$



El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ talla la circumferència en els punts K, L.
Siga $a = \overline{AK}$
Siga J el punt mig del segment $\overline{KL}$

$$\overline{AJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \overline{LJ} = \overline{KJ} = \frac{1}{2}a$$

Aplicant la potència del punt J respecte de la circumferència:

$$\overline{KJ} \cdot \overline{LJ} = r^2 - \overline{OJ}^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 = 4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - 1\right)^2$$

$$a^2 - \sqrt{3}a - 3 = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} = \sqrt{3} \cdot \Phi$$

Siga $x = \overline{AD}$ costat del triangle morat.
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència:

$$\overline{A} \cdot \overline{KA} = r^2 - \overline{OA}^2$$

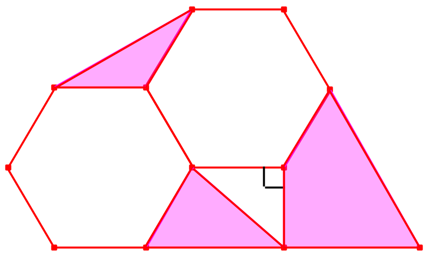
$$x \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} = 4 - 1$$

$$x = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}$$

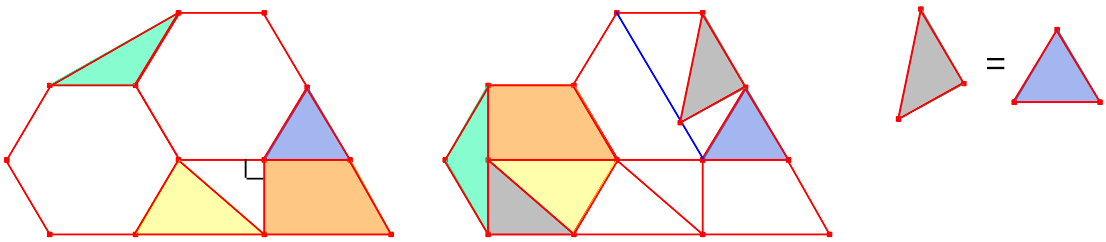
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{morada}} = \left(\frac{\overline{AB}}{x}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}}\right)^2 = (2\Phi)^2 = 4(1 + \Phi) = 6 + 2\sqrt{5}$$

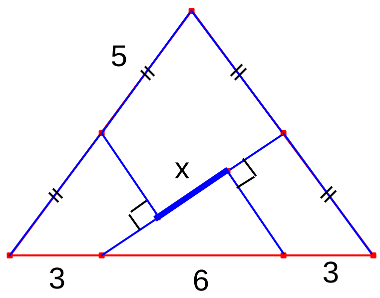
2807.- En la figura els dos hexàgons regulars són iguals i tenen àrea 1
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un hexàgon regular.

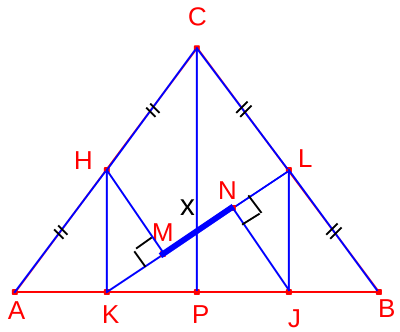


2808.- Calculeu la mesura del segment x marcat.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 12, \overline{AC} = \overline{BC} = 10$
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPB}$:
$\overline{CP} = 8$

Siga $\overline{AK} = 3, \overline{KJ} = 6, \overline{JB} = 3$
Siguen H, L els punts migs dels costats $\overline{AC}, \overline{BC}$, respectivament.

$\overline{LJ}$ és paral·lela mitjana del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPB}$

$\overline{HK}$ és paral·lela mitjana del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPA}$
$\overline{LJ} = \overline{HK} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KJL}$:
$\overline{KL} = 2\sqrt{13}$

Els triangles $\overset{\Delta}{KJL}, \overset{\Delta}{JLN}, \overset{\Delta}{HKM}$ són semblants.

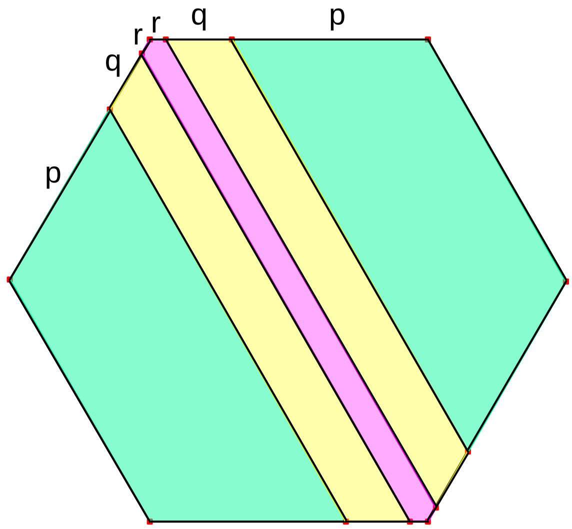
Aleshores, $\overset{\Delta}{JLN}, \overset{\Delta}{HKM}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{KM} = \overline{LN}$
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{LN}}{4} = \frac{4}{2\sqrt{13}}$$

$$\overline{LN} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$$

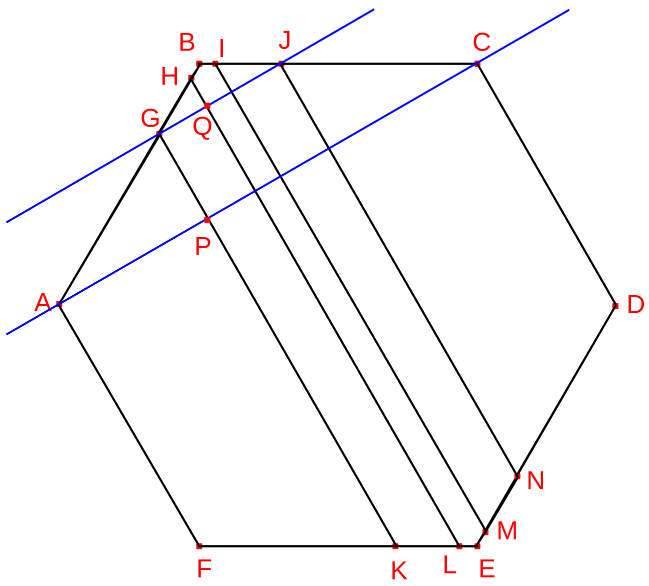
$$x = \overline{MN} = \overline{KL} - 2 \cdot \overline{LN} = 2\sqrt{13} - 2 \cdot \frac{8\sqrt{13}}{13} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

2809.- Un hexàgon regular s'ha dividit en cinc polígons d'igual perímetre.
Calculeu la proporció entre p, q, r.

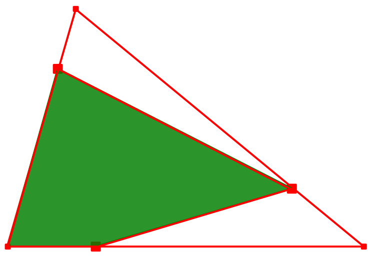


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = p + q + r$
Siguen els polígons $AFKG, KLHG, LEMIBH$ d'igual àrea.
Siga P la projecció de A sobre $\overline{KG}$
$\overline{GP} = \frac{1}{2}p$
Aleshores, $\overline{KG} = 2p + q + r$.

Siga Q la projecció de G sobre $\overline{LH}$
$\overline{HQ} = \frac{1}{2}q$
Aleshores, $\overline{LH} = \overline{MI} = 2p + 2q + r$.
Els perímetres són:
$P_{AFKG} = 5p + 2q + 2r$
$P_{KLHG} = 4p + 5q + 2r$
$P_{LEMIBH} = 4p + 4q + 6r$
Els tres perímetres són iguals:
$5p + 2q + 2r = 4p + 5q + 2r$. Simplificant:
$p = 3q$
$4p + 5q + 2r = 4p + 4q + 6r$. Simplificant:
$q = 4r$
$p = 12r$
Aleshores:
$p : q : r = 12 : 4 : 1$

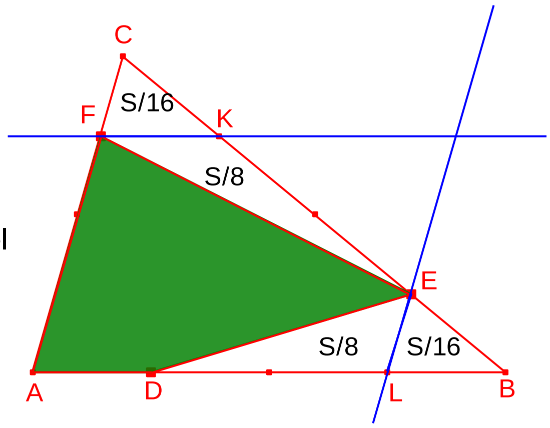


2810.- El punt assenyalat de cada costat del triangle és la quarta part del costat.
Calculeu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i la del triangle.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el quadrilàter $ADEF$ tal que:
$\overline{AD} = \frac{1}{4}\overline{AB}, \overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{BC}, \overline{CG} = \frac{1}{4}\overline{AC}$
Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Pel punt F tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla el costat $\overline{BC}$ en el punt K.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{FKC}$ i de raó 4:1
Aplicant el teorema de Tales:
$S_{FKC} = \frac{1}{16}S$
Els triangles $\overset{\Delta}{FCE}, \overset{\Delta}{FKC}$que tenen la mateixa altura, aleshores:
$S_{FKE} = 2 \cdot S_{FKC} = \frac{1}{8}S$
Pel punt E tracem una paral·lela al costat $\overline{AC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt L.

Anàlogament:
$S_{LBE} = \frac{1}{16}S, S_{DLE} = \frac{1}{8}S$
Aleshores, la proporció de les àrees del quadrilàter $ADEF$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$\frac{S_{ADEF}}{S} = \frac{S - 2\left(\frac{1}{16}S + \frac{1}{8}S\right)}{S} = \frac{5}{8}$$