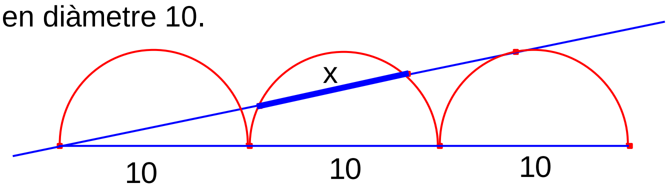
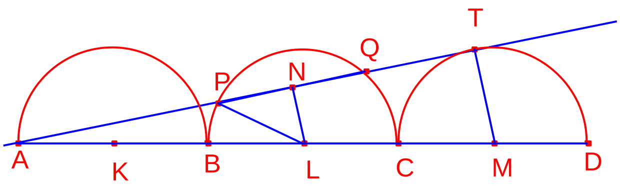
**Problemes de Geometria per a l'ESO 282**

2811.- Les tres semicircumferències tenen diàmetre 10.
Una recta és tangent a una d'elles.
Calculeu la mesura del segment $x$.




Solució:

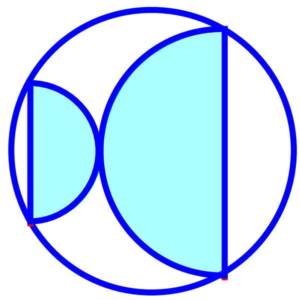



Siguen els diàmetres $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 10$
Siguen els centres $K, L, M$ de les tres semicircumferències.
Siga $\overline{PQ} = x$
Siga $T$ el punt de tangència de la recta que passa pel punt $A$ i la semicircumferència de centre $M$.
La mediatriu de la corda $\overline{PQ}$ passa pel centre $L$ de la semicircumferència.
Siga $N$ el punt mig de la corda $\overline{PQ}$

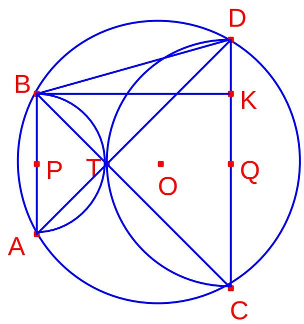
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATM}, \overset{\Delta}{ANL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{NL}}{5} = \frac{15}{25}$$
Aleshores, $\overline{NL} = 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNL}$:
$\overline{PN} = 4$
$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PN} = 8$

2812.- Els diàmetres dels semicercles són paral·lels. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle.



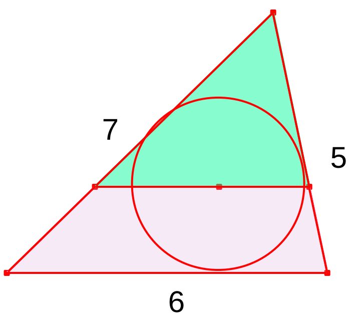
Solució:
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $R$.
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2r$ i centre $P$.
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD} = 2s$ i centre $Q$
Siga $T$ el punt de tangència de les dues circumferències:
Les rectes $PT$ i $AB$ són perpendiculars.
Les rectes $PT$, $AC$ són perpendiculars.
$\angle ATB = \angle CTB = 90°$
$\angle BAT = \angle CDT = 45°$
Aleshores, els punts $A, T, D$ estan alineats.




Siga $K$ la projecció de $B$ sobre la recta $CD$.
$\overline{BK} = \overline{PQ} = r + s, \overline{DK} = |r - s|$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKD}$:
$\overline{BD}^2 = (r+s)^2 + (r-s)^2 = 2r^2 + 2s^2$
$\overline{BD} = \sqrt{2(r^2+s^2)}$

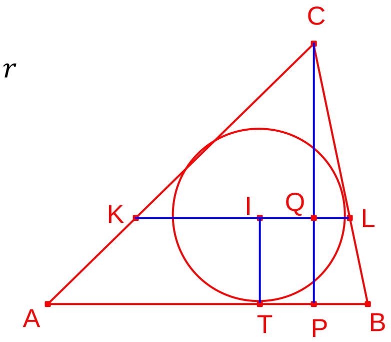
$\overline{AT} = r\sqrt{2}, \overline{DT} = s\sqrt{2}, \overline{AD} = (r+s)\sqrt{2}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$$\frac{\sqrt{2(r^2+s^2)}}{\sin 45°} = 2R$$
$$\frac{\sqrt{2(r^2+s^2)}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$
Simplificant:
$R^2 = r^2 + s^2$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{Total}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi s^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

2813.- Siga el triangle de costats $5, 6, 7$.
Pel centre de la circumferència inscrita s'ha dibuixat una recta paral·lela al costat que mesura $6$ que divideix el triangle en dues parts (un triangle i un quadrilàter)
Calculeu la proporció entre les àrees de les dues parts.




Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 5, b = 7, c = 6$
Siga $h = \overline{CP}$ altura del triangle sobre el costat $\overline{AB}$
Siga $I$ el centre de la circumferència inscrita de radi $\overline{IT} = r$
Siga el segment $\overline{KL}$ paral·lela a $\overline{AB}$ que passa per $I$.
Siga $Q$ la intersecció dels segments $\overline{CP}, \overline{KL}$




Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{18 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}}{4} = \frac{5+6+7}{2} r = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$$

Resolent les dues equacions:

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{6}, h = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{CQ} = h - r = \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

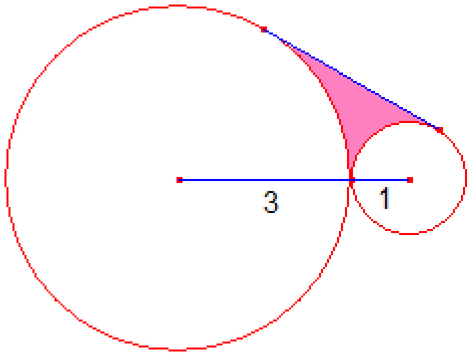
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLC},$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{KLC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{h-r}{h}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

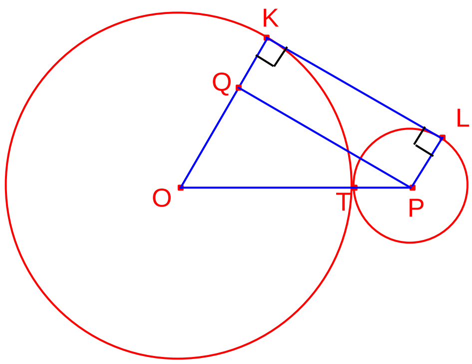
La proporció entre les dues parts és:

$$\frac{S_{KLC}}{S_{ABLK}} = \frac{S_{KLC}}{S_{ABC} - S_{KLC}} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

2814.- Sobre dues circumferències tangents de radis 3, 1, respectivament, s'ha dibuixat el segment tangent.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



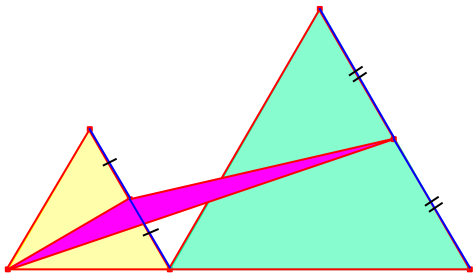

Solució:
Siguen les circumferències de centres $O, P$ i radis $\overline{OT} = 3, \overline{PT} = 1$.
Siga $\overline{KL}$ el segment tangent a les dies circumferències.
$\angle OKL = \angle PLK = 90°$
Siga $Q$ la projecció de $P$ sobre $\overline{OK}$.
$\overline{OQ} = 2, \overline{OP} = 4, \angle OQP = 90°$
Aleshores:
$\angle QOP = 60°$
$\angle OPL = 120° = 120°$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$\overline{PQ} = 2\sqrt{3}$




L'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del trapezi rectangle $OKLP$ menys la suma de dos sectors de 60º i radi 3 i 120º i radi 1:

$$S_{ombrejada} = \frac{3+1}{2} 2\sqrt{3} - \left(\frac{1}{6}\pi 3^2 + \frac{1}{3}\pi 1^2\right) = 4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi$$

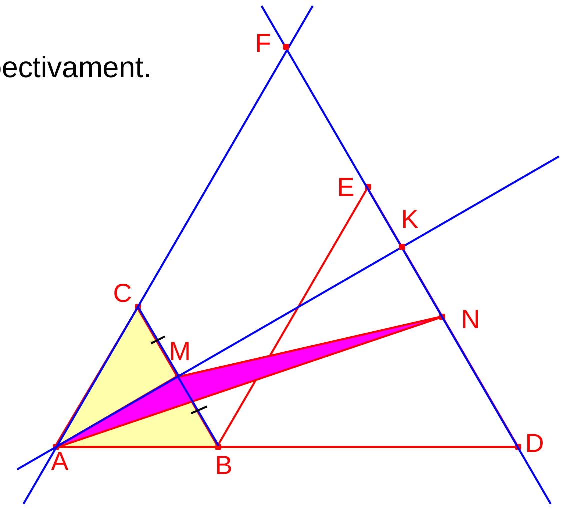
2815.- Donats dos triangles equilàters s'ha dibuixat un triangle amb el vèrtex d'un i els punts migs dels costats oposats al vèrtex (veure figura)
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle morat i el triangle equilàter groc.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDE}$ de costat $\overline{BD} = b$
Siguen $M, N$ els punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{DE}$, respectivament.




Siga $F$ la intersecció de les rectes $AC$ i $DE$
Siga K el punt mig del segment $\overline{DF}$

$$\overline{AM} = a\frac{\sqrt{3}}{3}, \overline{AK} = (a+b)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{KN} = \frac{1}{2}a$$

$$\overline{MN} = \ b\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és igual a la diferència entre les l'àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKN}$ i $\overset{\Delta}{MKN}$:

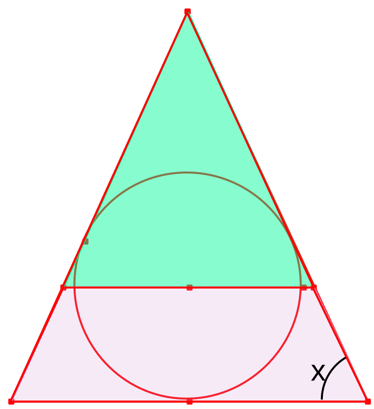
$$S_{AMN} = \frac{1}{2}(a+b)\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}b\cdot\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

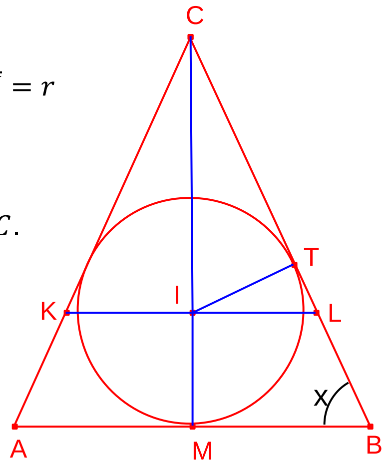
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

2816.- Siga el triangle isòsceles.
Pel centre de la circumferència inscrita s'ha dibuixat una recta paral·lela al costat desigual que divideix el triangle en dues parts (un triangle i un quadrilàter).
Calculeu $\cos x$.




Solució:




Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $I$ el centre de la circumferència inscrita de radi $\overline{IT} = \overline{IM} = r$
Siga el segment $\overline{KL}$ paral·lela a $\overline{AB}$ que passa per $I$.

Siga $\overline{CM} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLC}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLC}$ són semblants i de raó $\sqrt{2}:1$
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h-r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resolent l'equació:

$$h = \left(2+\sqrt{2}\right)r$$

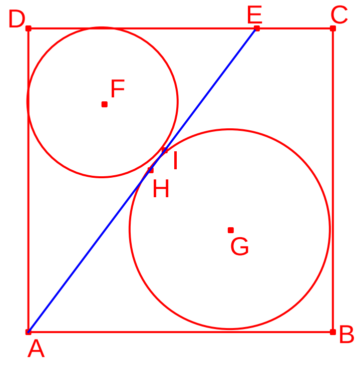
$$\overline{CI} = \left(1+\sqrt{2}\right)r$$

$$\angle CIT = \angle ABC = x$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ITC}$:

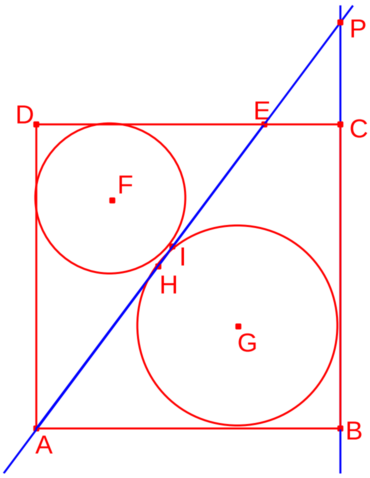
$$\cos x = \frac{\overline{CT}}{\overline{CI}} = \frac{r}{\left(1+\sqrt{2}\right)r} = \sqrt{2}-1$$

2817.- Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el punt $E$ en el costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{AE} = 5, \overline{DE} = 3$
Siga $I$ el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$.
Siga $H$ el punt de tangència al segment $\overline{AE}$ de la circumferència tangent alhora als costats $\overline{AB}, \overline{BC}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{HI}$.




Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$\overline{AD} = 4$
$\overline{CE} = 1$
Siga $P$ el punt intersecció de les rectes $AE, BC$.




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{PBA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AP}}{5} = \frac{\overline{BP}}{4} = \frac{4}{3}$$

Aleshores:

$$\overline{AP} = \frac{20}{3}, \overline{BP} = \frac{16}{3}$$

$$\overline{PE} = \overline{AP} - \overline{AE} = \frac{5}{3}$$

$I$ és el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$, aleshores:

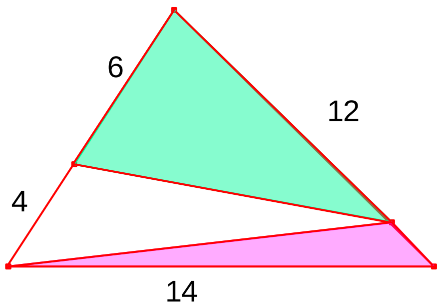
$$\overline{EI} = \frac{\overline{AE} + \overline{DE} - \overline{AD}}{2} = \frac{5 + 3 - 4}{2} = 2$$

$H$ és el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$, aleshores:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{AP} + \overline{BP} - \overline{AB}}{2} = \frac{\frac{20}{3} + \frac{16}{3} - 4}{2} = 4$$

$$\overline{HI} = \overline{PH} - \overline{EI} - \overline{PE} = 4 - 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

2818.- L'àrea del triangle verd és la meitat del total.
Calculeu l'àrea del triangle morat.




Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 12, b = 10, c = 14$
Siga $D$ en el costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{CD} = 6, \overline{AD} = 4$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S = \frac{\sqrt{36 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 8}}{4} = 24\sqrt{6}$

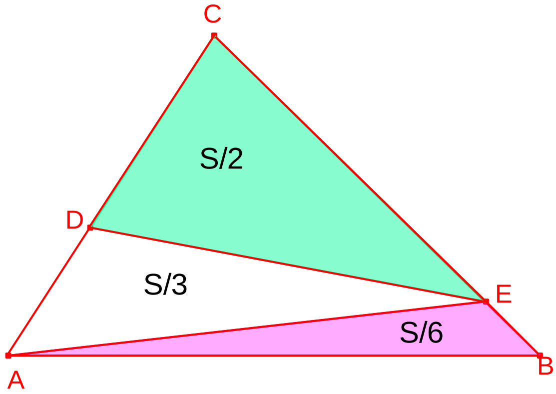
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEC}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$S_{DEC} = \frac{1}{2}S$

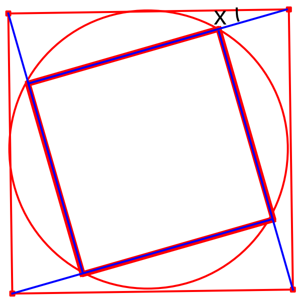
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$S_{ADC} = \frac{4}{6}S_{DEC} = \frac{1}{3}S$

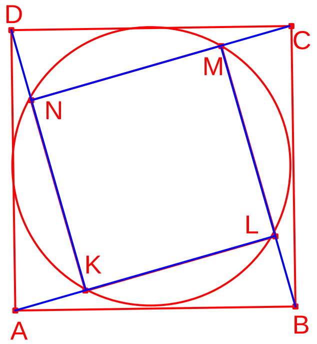
$S_{ABE} = S - \left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{3}S\right) = \frac{1}{6}S = 4\sqrt{6}$



2819.- Un quadrat està inscrit en una circumferència i un altre quadrat està circumscrit a la mateixa circumferència de manera que els seus vèrtexs es troben en les continuacions dels costats del primer. Determineu la mesura de l'angle $x$ entre els costats d'aquests quadrats.
*Jocs Olímpics de Geometria de Moscou)*




Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 1$ inscrit en la circumferència
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \overline{KM} = \sqrt{2}$ circumscrit a la circumferència.
Siga $\angle NCD = x$ angle que formen els dos quadrats.
Siga $\overline{DN} = \overline{CM} = a$




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNC}$:
$2 = a^2 + (1 + a)^2$.
Resolent l'equació:

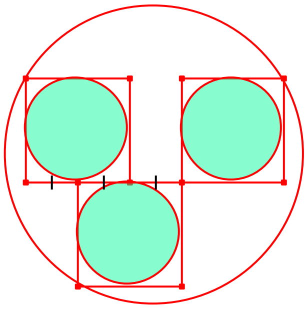
$$a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNC}$:

$$\sin x = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sin 15°$$

$$x = 15°$$

2820.- Determineu la proporció entre les àrees de la part ombrejada (cercles inscrits en quadrats)i el total (cercle exterior).



Solució:
Siga $R$ el radi de la circumferència exterior de centre $O$.
Siga $P$ el centre de la circumferència de radi $r = \overline{PL}$
Siguen $A, B, C$ vèrtex dels quadrats continguts en la circumferència exterior.
$\angle ACB = 45°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$\overline{AB} = r\sqrt{17}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{r\sqrt{17}}{\sin 45°} = 2R$$

$$R = r\sqrt{\frac{17}{2}}$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{3 \cdot \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3r^2}{\frac{17}{2}r^2} = \frac{6}{17}$$