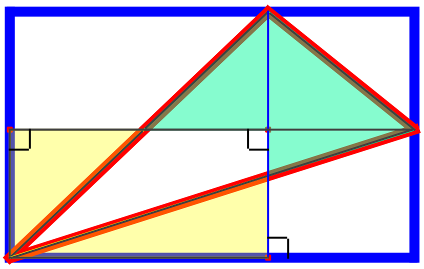
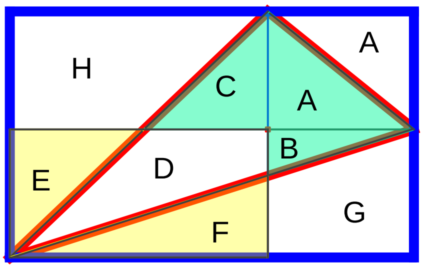
2821.- L'àrea del triangle roig és la tercera part del rectangle exterior verd.
Calculeu la proporció entre l'àrea pintada de verd i la pintada de groc.



Solució:
El triangle roig i el rectangle blau i els dos segments perpendiculars divideixen el rectangle exterior en 9 parts d'àrees:
$A, A, B, C, D, E, F, G, H$

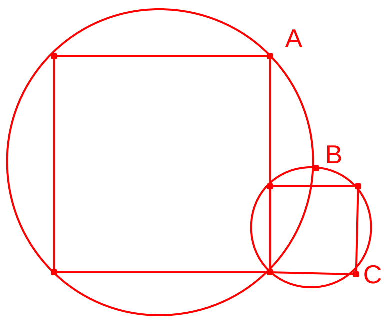


La diagonal d'un rectangle divideix el rectangle en dues parts iguals.
$H + E = C + D + F$
$B + D + E = F + G$

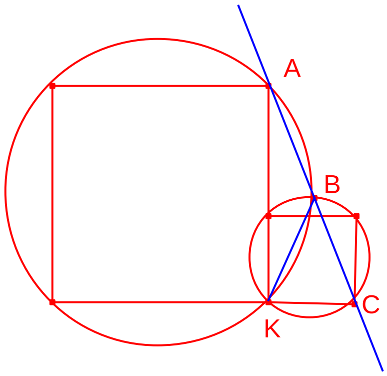
L'àrea del triangle roig és la tercera part de rectangle blau, aleshores:
$A + H + E + F + G = 2(A + B + C + D)$

$E + F + H + G = A + 2B + 2C + 2D$
$E + F + (C + D + F - E) + G = A + 2B + 2C + 2D$
$E + F + F - E + G = A + B + C + B + D$
$E + F + F - E + G = A + B + C + F + G - E$
Aleshores:
$E + F = A + B + C$

2822.- Donats els dos quadrats proveu que els punts A, B, C estan alineats.



Solució:

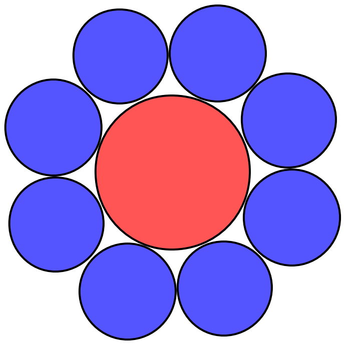


Per ser l'angle $\angle ABK$ inscrit i abraçar tres quarts de circumferència:
$\angle ABK = 135°$

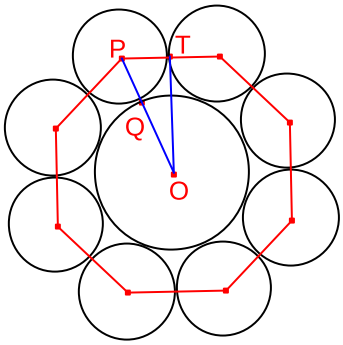
Per ser l'angle $\angle CBK$ inscrit i abraçar tres quarts de circumferència:
$\angle CBK = 45°$

Els angles $\angle ABK, \angle CBK$ són suplementaris.
Aleshores els tres punts estan alineats.

2823.- Vuit circumferències són tangents exteriors dos a dos i totes són tangents exteriors a una altra.
Calculeu la proporció entre els dos tipus de circumferències.
Calcula la proporció entre les àrees de la suma de les vuit blaves i la roja.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència roja de radi $\overline{OQ} = r$
Siga P el centre d'una circumferència blava de radi $\overline{PQ} = s$
Siga T el punt de tangència dues circumferències blaves.
Les vuit circumferències blaves són vèrtex d'un octògon regular.



$$\angle POT = \frac{1}{2}45°$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$

$$\frac{s}{r+s} = \sin\frac{45°}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

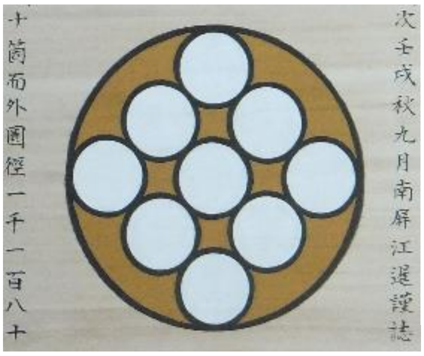
Resolent l'equació, la proporció entre els radis:

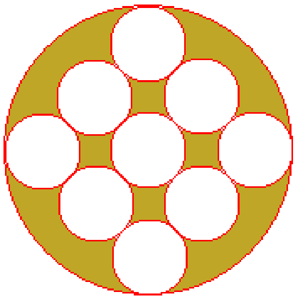
$$\frac{s}{r} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 0.6199$$

La proporció entre les àrees de la suma de les vuit blaves i la roja és:

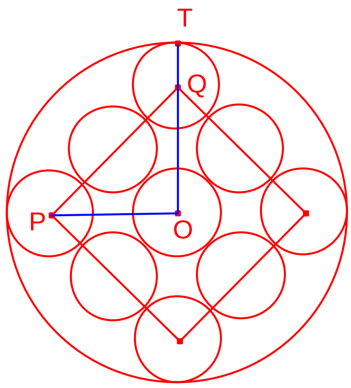
$$\frac{S_{blava}}{S_{roja}} = 8\cdot\left(\frac{s}{r}\right)^2 = 8\frac{2-\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2} = 3.0744$$

2824.- Nou circumferències tangents dos a dos estan a l'interior d'una altra circumferència.
Calculeu la proporció entre les àrees de la suma de les nou circumferències i la circumferència exterior.
Prefectura Shisouka





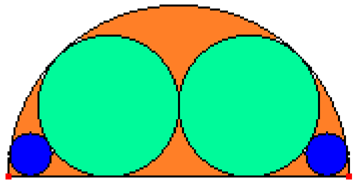
Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OT} = R$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = r$
Siga P el centre de la circumferència i radi r.
$\overline{PQ} = 4r$



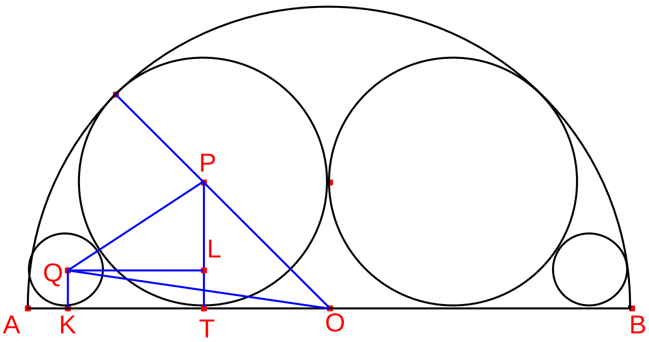
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POQ}$:
$\overline{OQ} = 2r\sqrt{2}$
Aleshores:
$R = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)r$
La proporció de les àrees de les nou circumferències i la circumferència exterior és.

$$\frac{9 \cdot S_Q}{S_O} = 9\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 9\frac{1}{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{9\left(9 - 4\sqrt{2}\right)}{49} \approx 0.6140$$

2825.- Donat el semicercle de radi R calculeu les radis les altres circumferències.



Solució:



Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la circumferència gran de centre P i radi $\overline{OT} = \overline{OT} = r$
$\overline{OP} = R - r = r\sqrt{2}$
Aleshores:
$r = (\sqrt{2} - 1)R$

Siga la circumferència menuda de centre Q i radi $\overline{QK} = s$
Siga L la projecció de Q sobre $\overline{PT}$
$\overline{PQ} = r + s, \overline{PL} = r - s$
Siga $\overline{QL} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLP}$
$a^2 = 4rs$

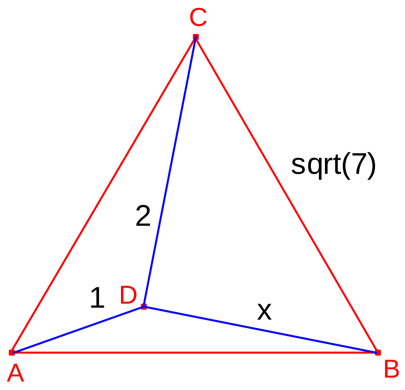
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKO}$
$(R - s)^2 = (a + r)^2 + s^2$
Simplificant:

$$(2\sqrt{2} - 1)s + (1 - \sqrt{2})R + 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{(\sqrt{2} - 1)Rs}$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{5\sqrt{2} - 1}{49}R$$

2826.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = \sqrt{7}$
Siga D un punt interior al triangle tal que $\overline{AD} = 1, \overline{CD} = 2$
Calculeu la mesura del segment $\overline{BD} = x$



Solució:
Siga $\beta = \angle CAD$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$2 = 7 + 1 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 1 \cdot \cos\beta$

$\cos\beta = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

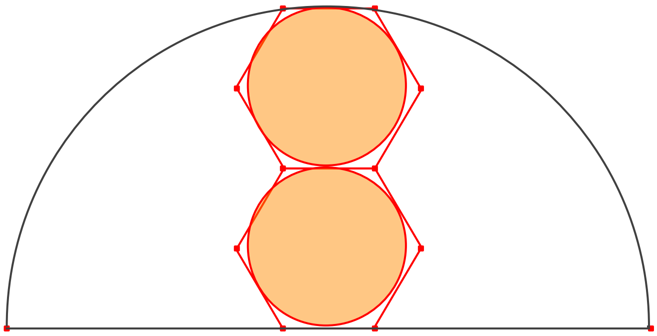
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$x^2 = 1 + 7 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7} \cdot \cos(60° - \beta)$

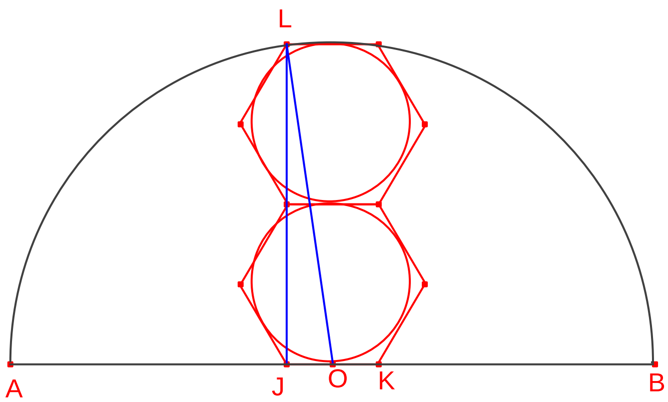
$x^2 = 8 - 2\sqrt{7}\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{7}}{7} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{21}}{7}\right) = 3$

$x = \sqrt{3}$

2827.- Els dos hexàgons regulars de la figura són iguals.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees de les circumferències inscrites als hexàgons i la del semicercle.



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OL} = R$
Siga L'hexàgon regular de costat $\overline{LK} = c$

$\overline{OJ} = \frac{1}{2}c, \overline{JL} = 2c\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LJO}$:

$R^2 = \frac{1}{4}c^2 + 12c^2 = \frac{49}{4}c^2$

El radi de les circumferències és:

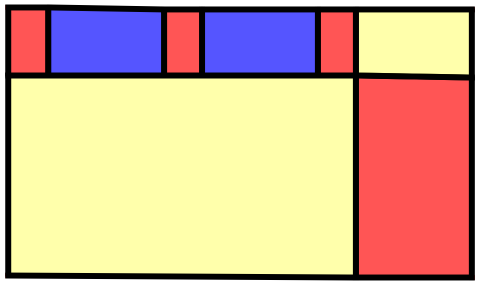
$r = \frac{1}{4}\overline{JL} = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$

La proporció entre la suma de les àrees de les circumferències inscrites als hexàgons i la del semicercle és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{2 \cdot \pi r^2}{\frac{1}{2} \cdot \pi R^2} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{49}{4}} = \frac{12}{49}$$

:

2828.- Tots els rectangles ombrejats de la figura són semblants.
Determineu la proporció entre la regió ombrejada de roig i l'àrea total.



Solució:
Els rectangles $JKLM, FNCP$ són iguals.
Siga $\overline{AG} = a, \overline{AE} = ka$
Els rectangles $AEFG, EFNB$ són semblants aleshores:

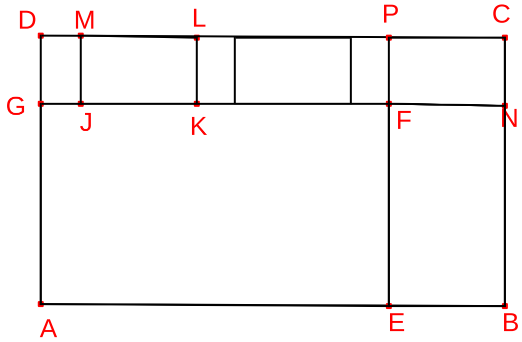
$\overline{BE} = \frac{1}{k}a$

Els rectangles, $EFNB, FNCP$ són semblants aleshores:

$\overline{CN} = \frac{1}{k^2}a$

Els rectangles $FNCP, DGJM$ són semblants aleshores:

$\overline{GJ} = \frac{1}{k^3}a$



$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = 3(\overline{GJ} + \overline{BE})$$

$$ka + \frac{1}{k}a = 3\left(\frac{1}{k^3}a + \frac{1}{k}a\right)$$

$$\frac{1 + k^2}{k} = 3\frac{1 + k^2}{k^3}$$

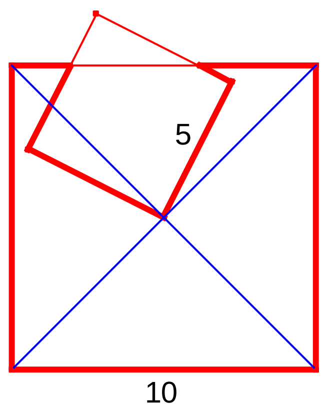
$$k^2 = 3$$

$$k = \sqrt{3}$$

La proporció d'àrees de la zona roja i el total és:

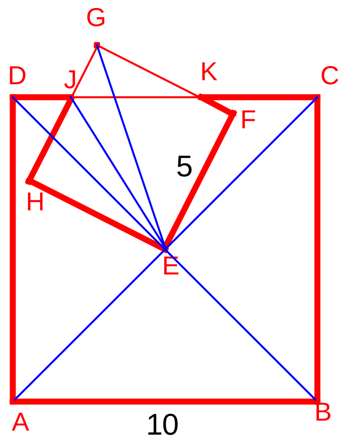
$$\frac{S_{roja}}{S_{total}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{k^5}a^2 + \frac{1}{k}a^2}{\left(k + \frac{1}{k}\right)a\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)a} = \frac{3 + k^4}{k^2(1 + k^2)^2} = \frac{3 + 9}{3 \cdot 4^2} = \frac{1}{4}$$

2829.- En la figura en el centre del quadrat de costat 10 com a vèrtex s'ha dibuixat un quadrat de costat 5.
Calculeu el perímetre del polígon remarcat.

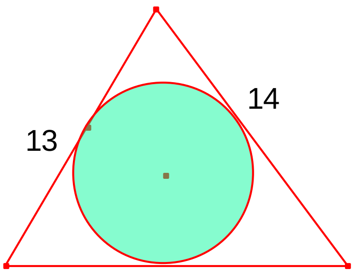


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre E i costat $\overline{AB} = 10$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = 5$
$\overline{DE} = \overline{GE} = 5\sqrt{2}$
$\angle EDJ = \angle EJG = 45°, \angle DEJ = \angle JEG$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{DEJ}, \overset{\Delta}{GEJ}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{DJ} = \overline{GJ}$
Anàlogament $\overline{CK} = \overline{GK}$
El perímetre del polígon $ABCKFEHJD$ és:

$$P_{\text{ABCKFEHJD}} = 2 \cdot \overline{EF} + 3 \cdot \overline{AB} + \overline{DJ} + \overline{JH} + \overline{CK} + \overline{KF}$$
$$= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + \overline{GH} + \overline{GF} =$$
$$= 10 + 3 \cdot 10 + 5 + 5 = 50$$



2830.- Els costats d'un triangle mesuren $13, 14, 15$.
Calculeu el radi de la circumferència inscrita.



Solució:
Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle.
L'àrea del triangle és:

$$S = \frac{\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}}{4} = \frac{13 + 14 + 15}{2} r$$

$84 = 21r$
Resolent l'equació:
$r = 4$

Notem que el triangle és heronià.