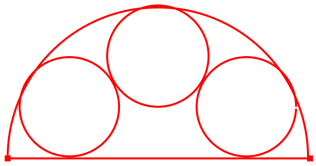
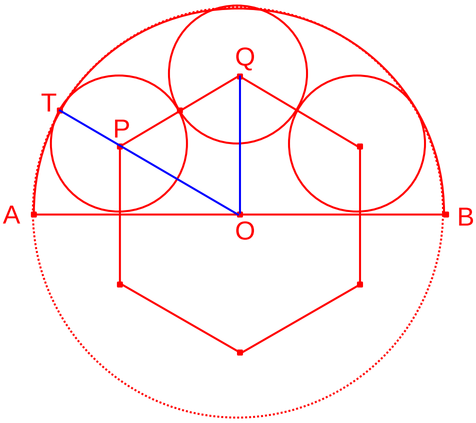
2831.- En la figura hi ha tres circumferències iguals i tangents dos a dos i tangents a una circumferència. Calculeu la proporció entre els radis.
Sangaku. Prefectura Tokio



Solució:



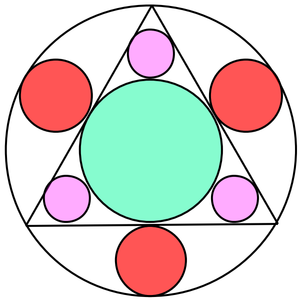
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2R$ i centre O.
Siguen P i Q els centres les circumferències de radi $\overline{PT} = r$

$\overset{\Delta}{OPQ}$ és un triangle equilàter, $\overline{OP} = \overline{PQ} = 2r$

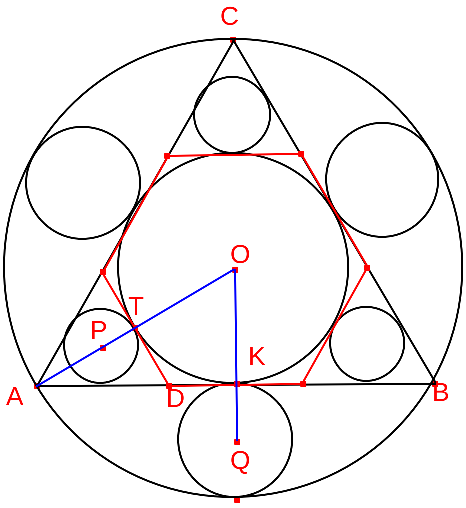
$\overline{OT} = R = 3r$

$r = \frac{1}{3}R$

2832.- En una circumferència de radi R s'ha inscrit un triangle equilàter.
S'han dibuixat 7 circumferències.
Calculeu el radi de les circumferències.
Sangaku. Prefectura de Chiba



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la circumferència inscrita al triangle equilàter de radi $\overline{OT} = \overline{OK} = r$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

Siga T el punt de tangència.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = s$

Pel punt T tracem una paral·lela al costat $\overline{BC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D.

$$\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

$$s = \frac{1}{3}r = \frac{1}{6}R$$

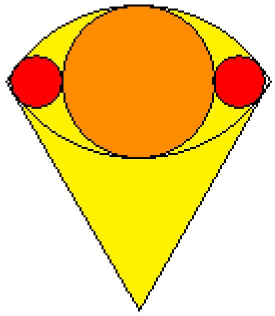
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QK} = t$

$$2R - 2t = \overline{CK} = 3r$$

$$2t = 2R - 3r = 2R - \frac{3}{2}R = \frac{1}{2}R$$

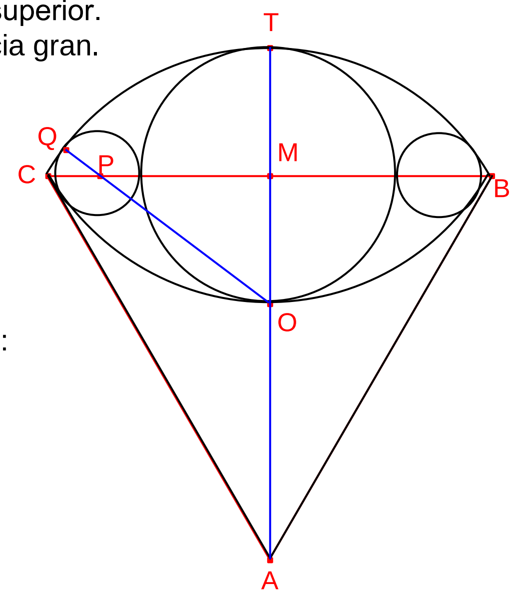
$$t = \frac{1}{4}R$$

2833.- En la següent figura, determineu la proporció entre els radis dos tipus de circumferències.
Sangaku. Prefectura Tochigi



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O, centre de l'arc superior.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$ centre de la circumferència gran.
Siga $\overline{OM} = R$ radi de la circumferència gran.

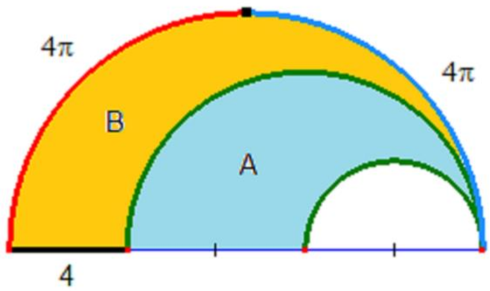


Siga P el centre de la circumferència menuda de l'esquerra, de radi $s = \overline{PQ}$
$\overline{OQ} = \overline{OA} = 2 \cdot \overline{MO} = 2R$

$\overline{PM} = R + s, \overline{OM} = R, \overline{OP} = 2R - s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$(2R - s)^2 = R^2 + (R + s)^2$
Simplificant:
$s = \frac{1}{3}R$

2834.- En la figura, calculeu la proporció de les àrees $\frac{A}{B}$



Solució:
Siga $\overline{KL} = R$ radi de la semicircumferència de centre O.
El quadrant mesura 4π

$$\frac{1}{4}2\pi R = 4\pi$$

Aleshores, $R = 8$

$$\overline{ML} = 2 \cdot 8 - 4 = 12$$

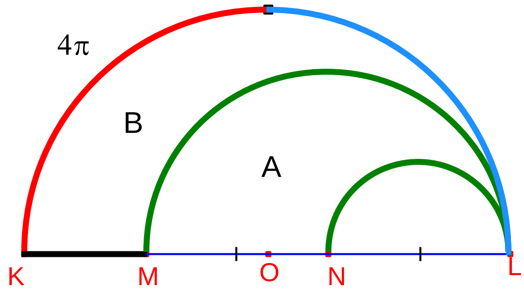
Les àrees són:

$$A = \frac{1}{2}\pi 6^2 - \frac{1}{2}\pi 3^2 = \frac{27}{2}\pi$$

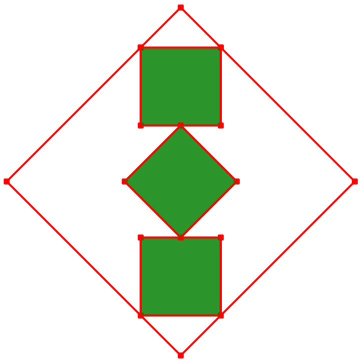
$$B = \frac{1}{2}\pi 8^2 - \frac{1}{2}\pi 6^2 = 14\pi$$

La proporció de les àrees és:

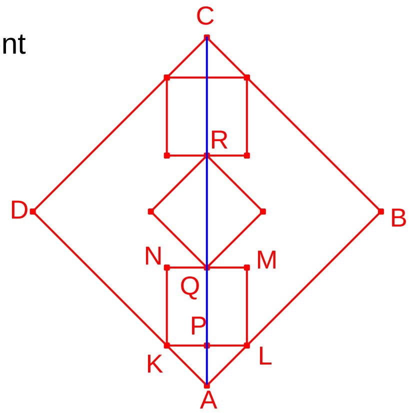
$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{27}{2}\pi}{14\pi} = \frac{27}{28}$$



2835.- Els tres quadrats ombrejats de la figura són iguals.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees de la suma dels tres quadrats iguals i el quadrat exterior.

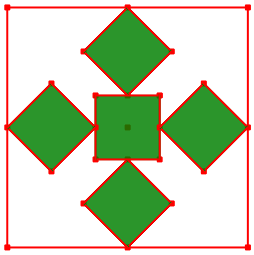


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = x$
Siguen P, Q els punts migs dels costats $\overline{KL}, \overline{MN}$, respectivament
Siga $\overline{QR}$ diagonal del quadrat central.

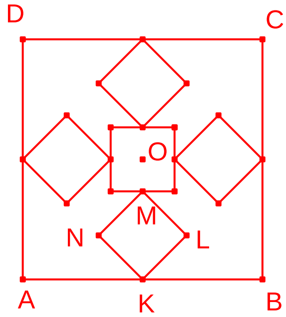


$\overline{AC} = c\sqrt{2}$
$\overline{AP} = \frac{1}{2}x, \overline{QR} = x\sqrt{2}$
$\overline{AC} = 3 \cdot \overline{LM} + \overline{QR} = (3 + \sqrt{2})x$
$c\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})x$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{7}c$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{3x^2}{c^2} = \frac{3 \cdot \left(\frac{-2 + 3\sqrt{2}}{7}c\right)^2}{c^2} = \frac{6(11 - 6\sqrt{2})}{49} \approx 0.3079$$

2836.- Els cinc quadrats ombrejats de la figura són iguals.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees de la suma dels cinc quadrats iguals i el quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = x$



$\overline{AC} = c\sqrt{2}$

$\overline{OM} = \frac{1}{2}x, \overline{KM} = x\sqrt{2}$

$\overline{AC} = 2 \cdot (\overline{KM} + \overline{OM}) = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)x$

$c\sqrt{2} = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)x$

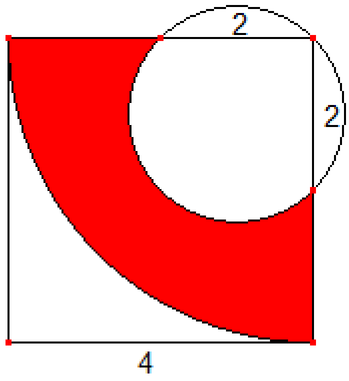
Resolent l'equació:

$$x = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{7}c$$

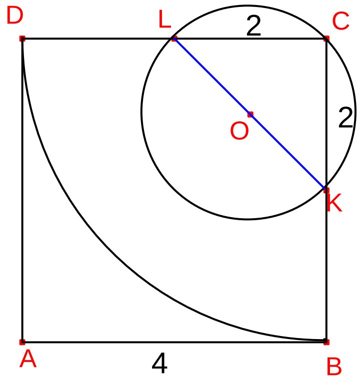
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{5x^2}{c^2} = \frac{5 \cdot \left(\frac{-1 + 2\sqrt{2}}{7}c\right)^2}{c^2} = \frac{5\left(9 - 4\sqrt{2}\right)}{49} \approx 0.3411$$

2837.- Donat un quadrat de costat 4 s'ha dibuixat una circumferència que passa per un vèrtex i talla els costats contigus al vèrtex en dos segments de 2.

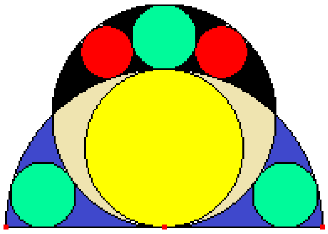


Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 4$

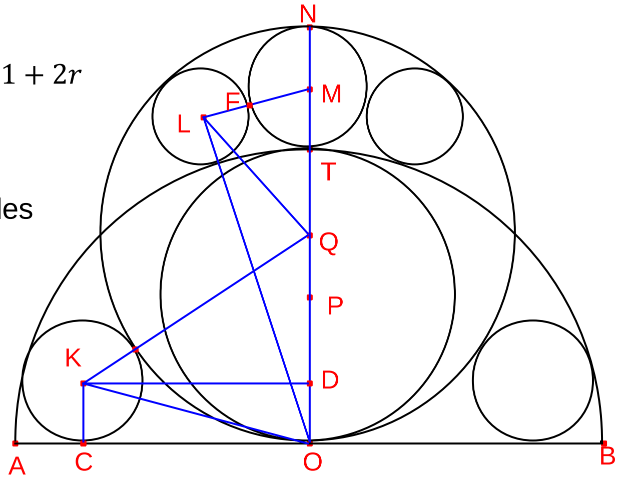


Siga la circumferència que passa pels punts $C, L. M, \overline{CK} = \overline{CL} = 2$
$\overline{LM} = 2\sqrt{2}$ és el diàmetre de la circumferència.
L'àrea ombrejada és:
$S = \frac{1}{4} \cdot \pi 4^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3\pi - 2$

2838.- En la figura, el radi de la semicircumferència és $R=1$.
Calculeu el radi dels quatre tipus de circumferència.
Prefectura de Fukushima



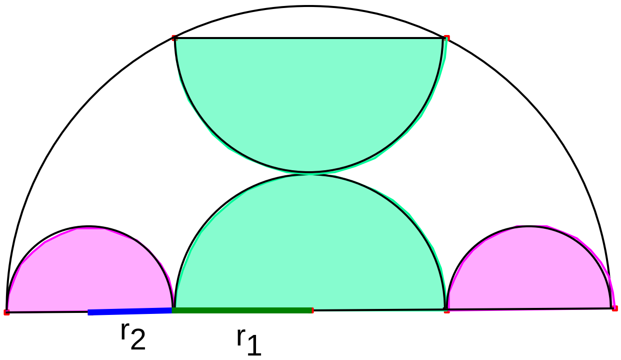
Solució:
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}=2$ i centre O.
Siga la circumferència de centre P i diàmetre $\overline{OT}=1$
El seu radi és $\overline{PO}=\frac{1}{2}$.
Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KC}=r$
Siga la circumferència de centre Q de diàmetre $\overline{ON}=1+2r$
Siga D la projecció de K sobre $\overline{ON}$. Siga $\overline{KD}=a$



$$\overline{OK}=1-r, \overline{QK}=\frac{1}{2}+2r, \overline{QD}=\frac{1}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OCK}, \overset{\Delta}{KDQ}$:
$$a^2=(1-r)^2-r^2$$
$$a^2=\left(\frac{1}{2}+2r\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
Igualant les expressions:
$$(1-r)^2-r^2=\left(\frac{1}{2}+2r\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
Simplificant i resolent l'equació:
$$4r^2+4r-1=0, \qquad r=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$
El radi de la circumferència de diàmetre $\overline{ON}$ és: $\overline{QO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LF}=s$
Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MF}=\overline{MT}=r$
$$\overline{OL}=1+s, \overline{LM}=r+s, \overline{QL}=\frac{\sqrt{2}}{2}-s, \overline{OM}=1+r, \overline{QM}=\frac{1}{2}$$
Siga $\angle LON=\alpha$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LON}$:
$$(r+s)^2=(1+s)^2+(1+r)^2-2(1+s)(1+r)\cos\alpha$$
$$\cos\alpha=\frac{1+r+s-rs}{(1+s)(1+r)}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LOQ}$:
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-s\right)^2=(1+s)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2(1+s)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-s\right)^2=(1+s)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2(1+s)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+r+s-rs}{(1+s)(1+r)}$$
$$\sqrt{2}s=1+2s-\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}+s-\frac{-1+\sqrt{2}}{2}s}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}$$
Resolent l'equació:
$$s=\frac{1}{6}$$

2839.- En la següent figura, calculeu:

$\frac{r_1}{r_2}$



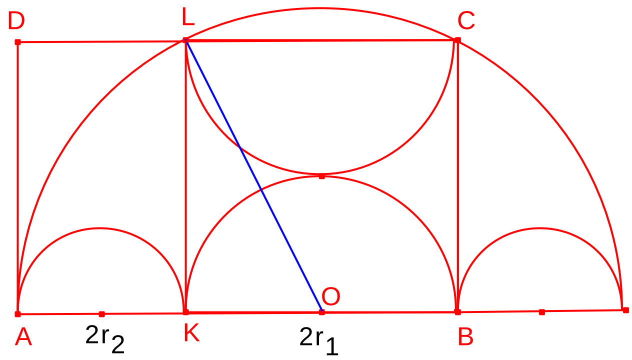
Solució 1:
Siga la semicircumferència de centre O.
Els diàmetres $\overline{BK}, \overline{CL}$ formen un quadrat.

$\overline{OL} = \frac{\sqrt{5}}{2} r_1$

El rectangle $ABCD$ és auri.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{KB}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

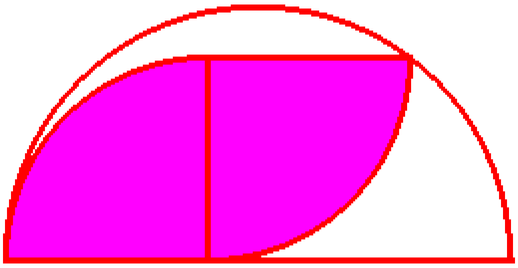


Solució 2:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OL} = r_1 + 2 \cdot r_2$
$\overline{OK} = r_1, \overline{KL} = 2 \cdot r_1$

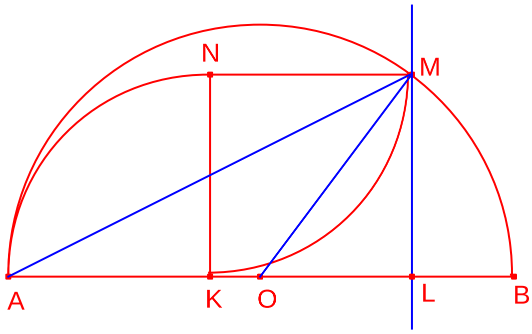
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:
$(r_1 + 2 \cdot r_2)^2 = {r_1}^2 + (2 \cdot r_1)^2$
Simplificant:
${r_1}^2 - r_2 \cdot r_1 - 1 = 0$
Resolent l'equació:

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2840.- En quina proporció estan les àrees de la suma dels dos quadrants iguals i la del semicercle.



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga $\overline{AK} = r$ radi del quadrant.
Siga L la projecció de M sobre el diàmetre $\overline{AB}$.
$\overline{AL} = 2r, \overline{LM} = r$
$\overline{OL} = 2r - R$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLP}$:
$R^2 = r^2 + (2r - R)^2$
Simplificant:
$5r - 4R = 0$
$\frac{r}{R} = \frac{4}{5}$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{16}{25}$$