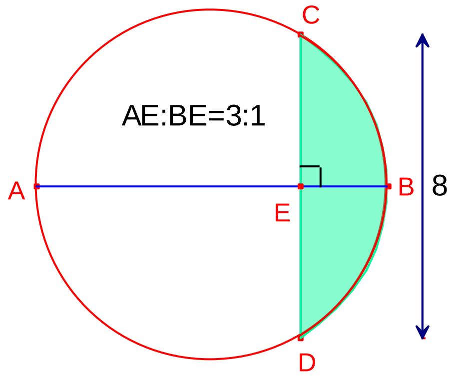
2841.- Siga E el punt del diàmetre $\overline{AB}$ de la circumferència tal que $\overline{AE}:\overline{BE}=3:1$
Siga $\overline{CE}=8$ perpendicular al diàmetre.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

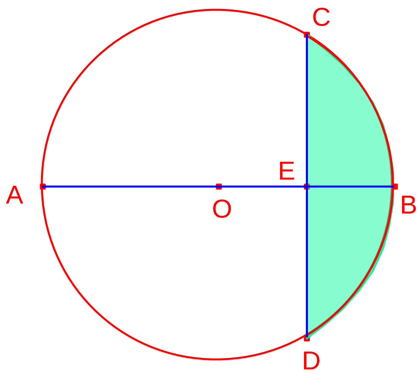


Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
Siga $\overline{BE}=x, \overline{AE}=3x$
$\overline{OA}=2x, \overline{OE}=x$
El diàmetre $\overline{AB}$ és mediatriu de la corda $\overline{CD}$.
Aleshores, $\overline{CE}=\overline{DE}=4$
Aplicant la potència del punt E respecte de la circumferència:
$\overline{AE}\cdot\overline{BE}=\overline{CE}\cdot\overline{DE}$
$3x\cdot x=4\cdot 4$
Resolent l'equació:

$$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}}=\sqrt{3}$$

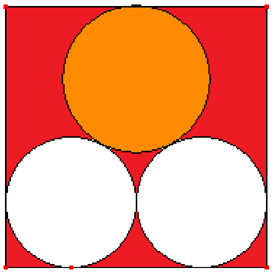
Aleshores, $\angle COD=120°$



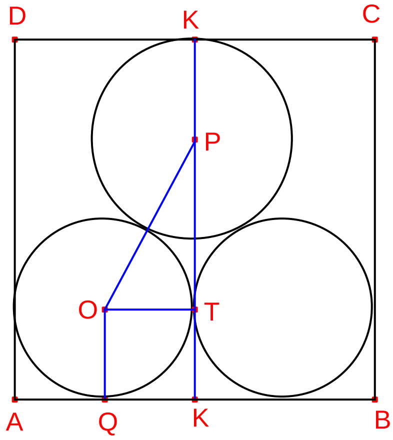
L'àrea ombrejada és igual a un sector de 120° menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCD}$:

$$S=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 8=\frac{64}{9}\pi-\frac{16}{3}\sqrt{3}\approx 13.1026$$

2842.- En l’interior d’un quadrat hi ha tres circumferències tangents dos a dos.
Calculeu la proporció dels radis de les dues circumferències.
Prefectura Aichi



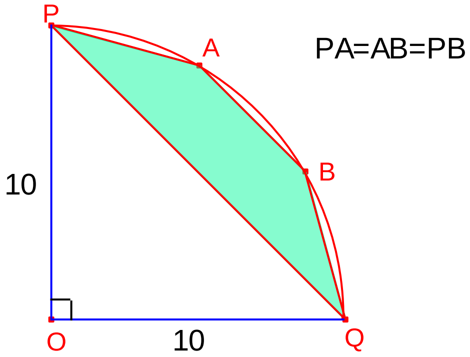
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OQ} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = R$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4r$



$\overline{PT} = 3r - R$
$\overline{OP} = R + r$

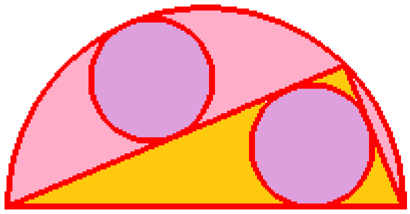
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$(R + r)^2 = (3r - R)^2 + r^2$
Simplificant:
$2Rr = 9r^2 - 6Rr$
$8R = 9r$
$\frac{r}{R} = \frac{8}{9}$

2843.- Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OQ} = 10$
Siguen A, B el unt de l'arc tal que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{PB}$
Calculeu l'àrea del quadrilàter $PABQ$.

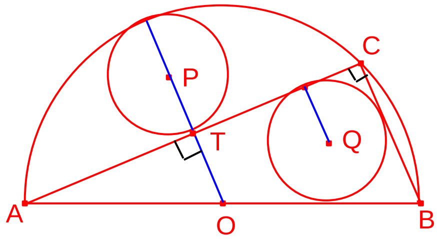


Solució:
$\angle POA = \angle AOB = \angle BOQ = 30°$
L'àrea del quadrilàter $PABQ$ és:
$$S_{PABQ} = 3 \cdot S_{POA} - S_{OPQ} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 30° - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 75 - 50 = 25$$

2844.- Les dues circumferències tenen radi 4.
Calculeu el radi de la semicircumferència.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = 4$

T és el punt mig del costat $\overline{AC}$, $\angle ATO = 90°$

$\overline{OT} = R - 8$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOT}$:

$\overline{AT} = \sqrt{R^2 - (R-8)^2} = \sqrt{16R - 64}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOT}, \overset{\Delta}{ABC}$ i de raó $1:2$

$\overline{BC} = 2R - 16$, $\overline{AC} = 2\sqrt{16R - 64}$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$4 = r = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2}$$

$$4 = \frac{2\sqrt{16R - 64} + 2R - 16 - 2R}{2}$$

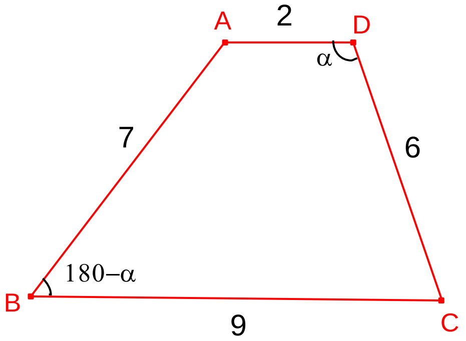
Simplificant:

$12 = \sqrt{16R - 64}$

Resolent l'equació:

$R = 13$

2845.- Calculeu l'àrea del quadrilàter $ABCD$ de costats 2, 6, 9, 7 i angles oposats suplementaris.



Solució:

Siga $\overline{AC} = x$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$x^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(180° - \alpha)$

$x^2 = 130 + 126 \cdot \cos\alpha$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ACD}$:

$x^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 40 - 24 \cdot \cos\alpha$

Restant ambdues expressions i simplificant:

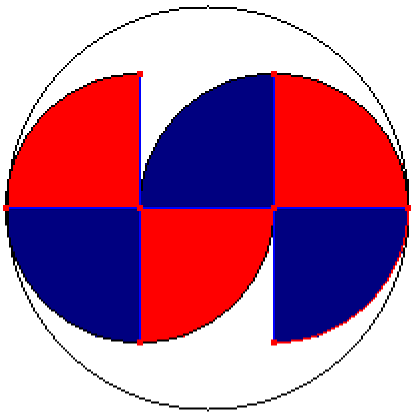
$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

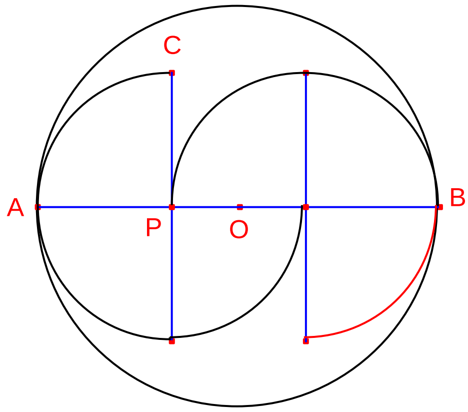
L'àrea del quadrilàter $ABCD$ és:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(7 \cdot 9 + 2 \cdot 6)\sin\alpha = \frac{1}{2}(7 \cdot 9 + 2 \cdot 6)\frac{4}{5} = 30$

2846.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.

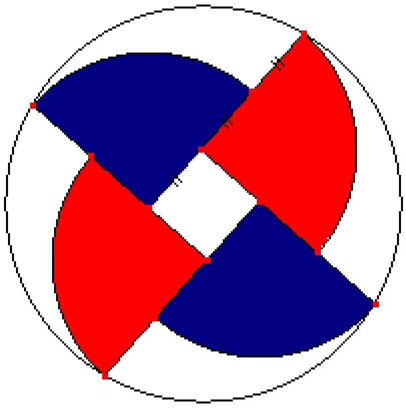


Solució:
Siga P el centre del quadrat de circumferència
Siga $\overline{PA} = r$ radi del quadrat de circumferència.
Siga $\overline{AB} = 3r$ diàmetre de la circumferència exterior de centre O.
El radi de la circumferència exterior és:
$\overline{OA} = \frac{3}{2}r$

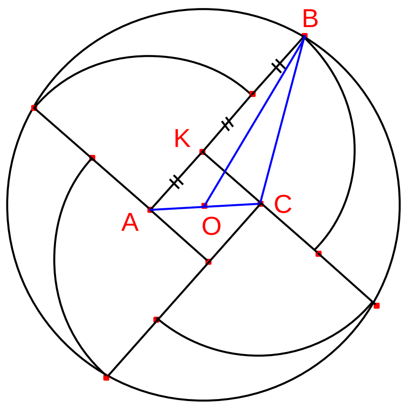


La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot r^2}{R^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot r^2}{\left(\frac{3}{2}r\right)^2} = \frac{2}{3}$$

2847.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga el quadrat de centre K i radi $\overline{KB} = 2a$
Siguen A, C centres de dos quadrants.
Siga $\overline{AK} = a$
El centre O de la circumferència exterior és el punt mig del segment $\overline{AC}$
Siga $\overline{OB} = R$ radi de la circumferència exterior.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKC}$
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKC}$
$\overline{BC} = a\sqrt{5}$
$\overline{OB}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores:

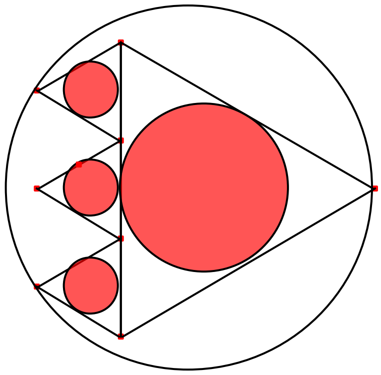
$$R^2 = \frac{2 \cdot \left(a\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot (3a)^2 - \left(a\sqrt{5}\right)^2}{4}$$

$$R^2 = \frac{13}{2}a^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{(2a)^2}{R^2} = \frac{8}{13}$$

2848.- En la figura hi ha 4 triangles equilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.

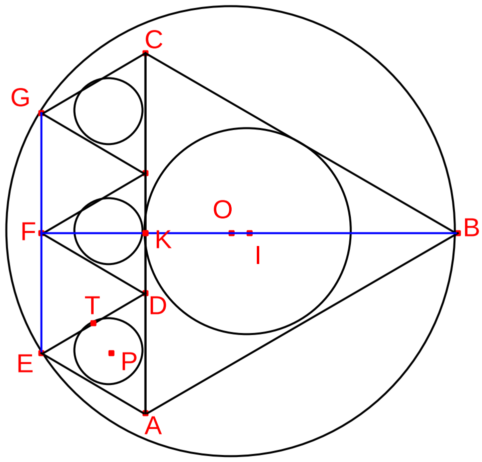


Solució:

Siga el triangle equilàter menut $\overset{\Delta}{ADE}$ de costat $\overline{AD} = c$

Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ de centre P i radi $\overline{PT} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$

Siga La circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
El seu radi és:



$$\overline{IK} = 3\overline{PT} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{EG} = 2c, \overline{EF} = c, \overline{BF} = 4\overline{FK} = 2\sqrt{3}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFB}$:

$$\overline{BE} = c\sqrt{13}$$

Siga $\alpha = \angle EBF$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OB} = R$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EGB}$

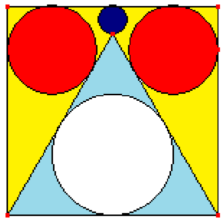
$$\frac{2c}{\frac{4\sqrt{3}}{13}} = 2R$$

$$R = \frac{13\sqrt{3}}{12}c$$

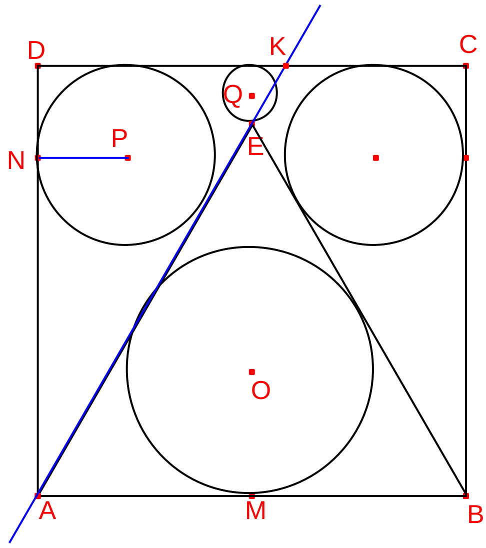
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}{R^2} = \frac{c^2}{\left(\frac{13\sqrt{3}}{12}c\right)^2} = \frac{48}{169}$$

2849.- La figura està formada per un quadrat, un triangle equilàter i quatre circumferències.
Prefectura Okayama



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = c$



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Siga O el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ de radi $r = \overline{OM}$

$$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$r = \frac{1}{3}\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$$

Siga Q el centre de la circumferència superior de radi $s = \overline{QE}$

$$2s = c - \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$s = \frac{2-\sqrt{3}}{4}c$$

$$\frac{s}{r} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

La recta AE talla el costat $\overline{CD}$ en el punt K.

Siga P el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADK}$ de radi $t = \overline{PT}$
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:

$$t = \frac{\overline{AD} + \overline{DK} - \overline{AK}}{2}$$

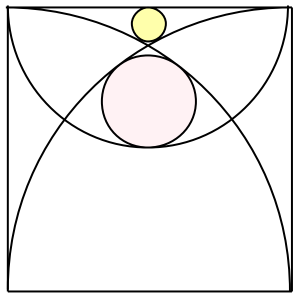
$$\angle DAK = 30°$$

$$\overline{DK} = \frac{\sqrt{3}}{3}c, \overline{AK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$$

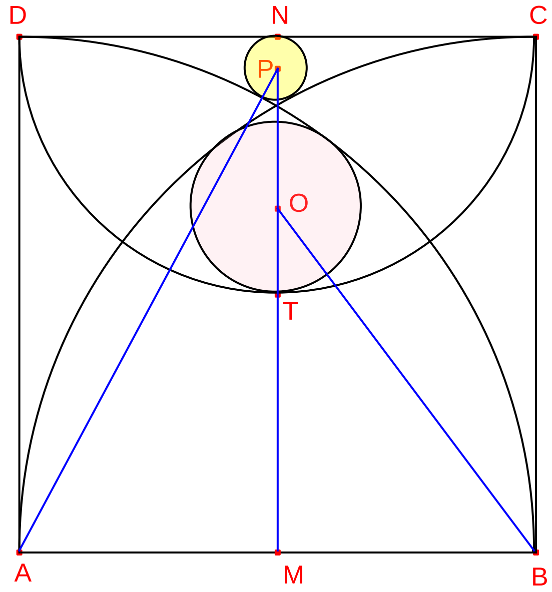
$$t = \frac{c + \frac{\sqrt{3}}{3}c - \frac{2\sqrt{3}}{3}c}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}c$$

$$\frac{t}{r} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3} - 1$$

2850.- Calculeu la proporció entre les àrees de les dues dues circumferències.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga O el centre de la circumferència gran de radi $\overline{OT} = R$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.



$\overline{OM} = \frac{1}{2}c + R, \overline{OB} = c - R, \overline{BM} = \frac{1}{2}c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$(c - R)^2 = \left(\frac{1}{2}c + R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2$
Simplificant:
$R = \frac{1}{6}c$

Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PN} = r$
$\overline{PM} = c - r, \overline{AP} = c + r, \overline{AM} = \frac{1}{2}c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:
$(c + r)^2 = (c - r)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2$
Simplificant:
$r = \frac{1}{16}c$
La proporció entre els radis és:
$\frac{r}{R} = \frac{3}{8}$