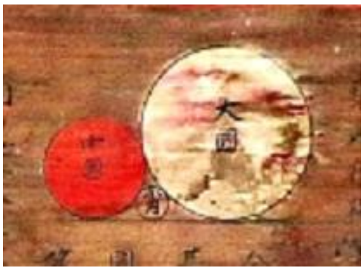
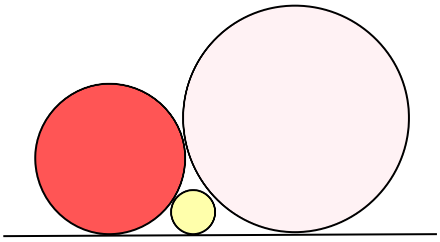
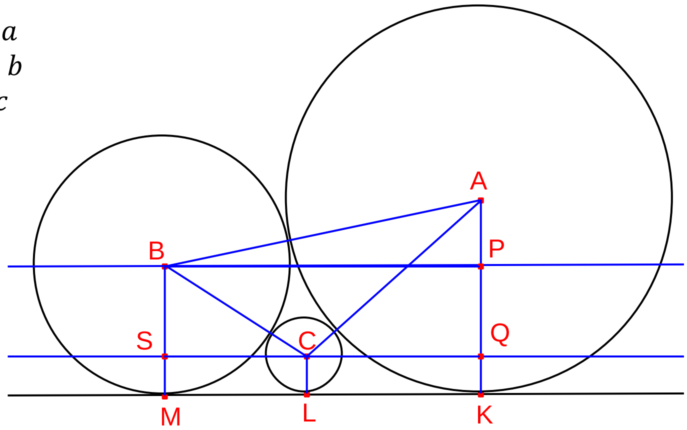
2851.- Tres circumferències són tangents a una recta i tangents exteriors dos a dos.
Determineu la relació entre els radis de les tres circumferències.
Prefectura de Gunma





Solució:

Siga la circumferència de centre A i radi $\overline{AK} = a$
Siga la circumferència de centre B i radi $\overline{BM} = b$
Siga la circumferència de centre C i radi $\overline{CL} = c$



Siga P la projecció de B sobre $\overline{AK}$
Siga Q la projecció de C sobre $\overline{AK}$
Siga S la projecció de C sobre $\overline{BM}$

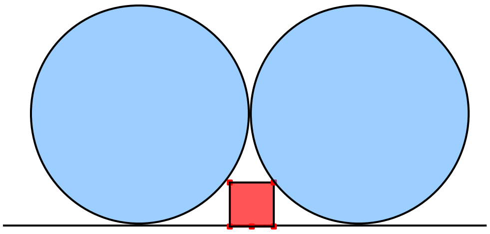
Siga $\overline{LK} = e, \overline{BP} = \overline{MK} = d$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPA}$:
$4ab = d^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQA}$:
$4ac = e^2$

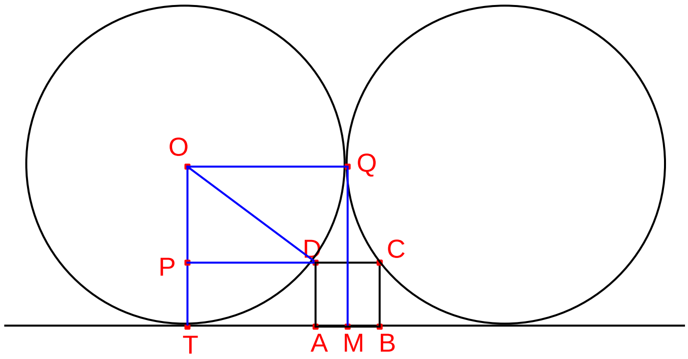
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CSB}$:
$4bc = (d - e)^2$
Substituint les dues primeres expressions en la tercera:
$4bc = 4ab + 4ac - 8a\sqrt{bc}$
$bc = ab + ac - 2a\sqrt{bc}$
$2a\sqrt{bc} = ab + (a - b)c$
Elevant al quadrat:
$4a^2bc = (ab)^2 + (a + b)^2c^2 + 2abc(a - b)$
$(a + b)^2c^2 - 2ab(a + b)c + (ab)^2 = 0$
Resolent l'equació en la incògnita c:
$$c = \frac{ab}{2(a + b)}$$
O bé:
$2(ac + bc) = ab$

2852.- Dues circumferències tangents de radi R són tangents a una recta.
Dos vèrtexs d'un quadrat toquen les dues circumferències i els altres dos estan sobre la recta.
Determineu el costat c del quadrat en funció de R
Prefectura de Okayama

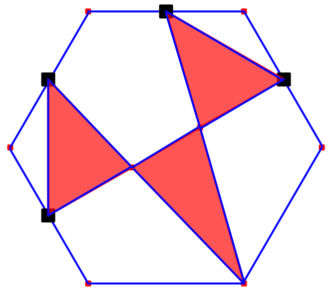


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OT} = \overline{OQ} = R$

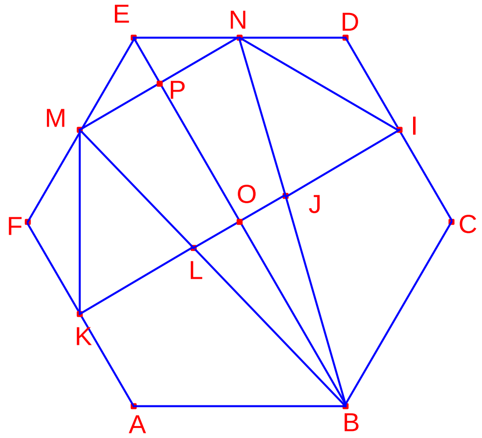
Siga P la projecció de D sobre $\overline{OT}$.
$\overline{OP} = R - c, \overline{PD} = R - \frac{1}{2}c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPD}$:
$R^2 = (R-c)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2$
Simplificant:
$5c^2 - 12Rc + 4R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$c = \frac{2}{5}R$



2853.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular exterior.
Els vèrtexs marcats dels triangles són punts migs dels costats de l'hexàgon.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$ de centre O.
Siguen K, M, N punts migs dels costats $\overline{AF}, \overline{EF}, \overline{DE}$, respectivament.
Siga P el punt mig del segment $\overline{MN}$



$$\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{EM} = \frac{1}{4}c, \overline{MN} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{4}c$$

$$\overline{BP} = 2c - \overline{EP} = \frac{7}{4}c, \overline{OP} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{KI} = c\sqrt{3}$$

Els triangles $M\overset{\Delta}{N}B, L\overset{\Delta}{J}B$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{LJ}}{\frac{\sqrt{3}}{2}c} = \frac{1}{\frac{7}{4}}$$

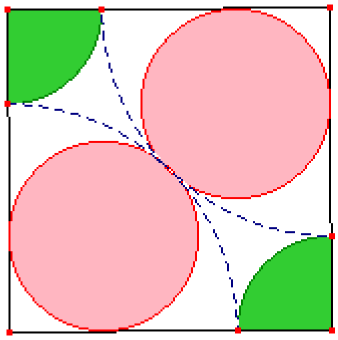
$$\overline{LJ} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}(\overline{KI} - \overline{LJ}) = \frac{5\sqrt{3}}{14}c$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{2 \cdot S_{KLM} + S_{LJB}}{S_{ABCDEF}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\overline{KL} \cdot \overline{OP} + \frac{1}{2}\overline{LJ} \cdot \overline{OB}}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{14} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot 1}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{23}{84}$$

2854.- Calculeu la proporció entre les àrees verda i morada.



Solució:

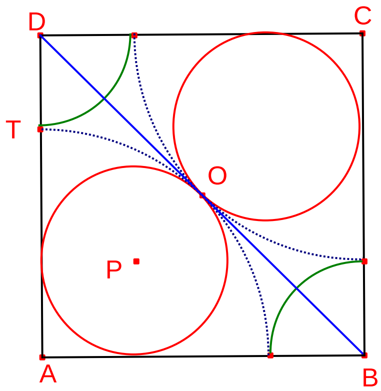
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

$\overline{AO} = \overline{AT} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

Siga $\overline{PO} = r$ radi de la circumferència morada.

La circumferència està inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$r = \frac{c + c - c\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}c$



Siga el quadrant de centre D i radi $\overline{DT} = s$

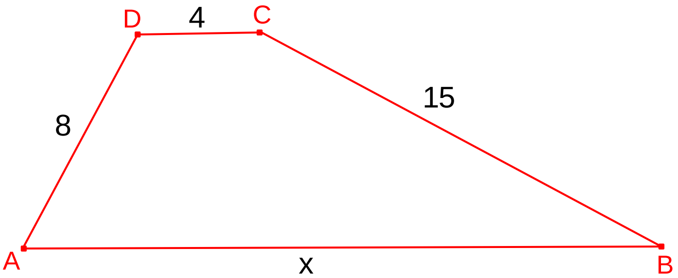
$s = c - \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}c$

Notem que $r = s$

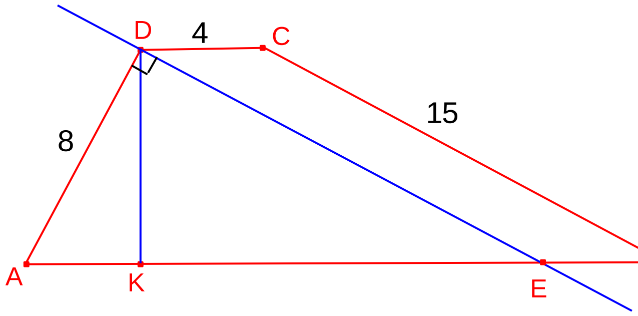
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{morada}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot s^2}{2\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4}$$

2855.- Donat el trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{AB} = x, \overline{CD} = 4$ i costats no paral·lels
$\overline{BC} = 15, \overline{AD} = 8$, i $A + B = 90°$
Calculeu la mesura del costat $\overline{AB} = x$

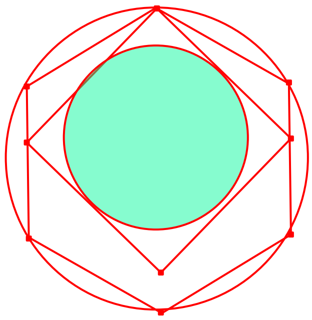


Solució:

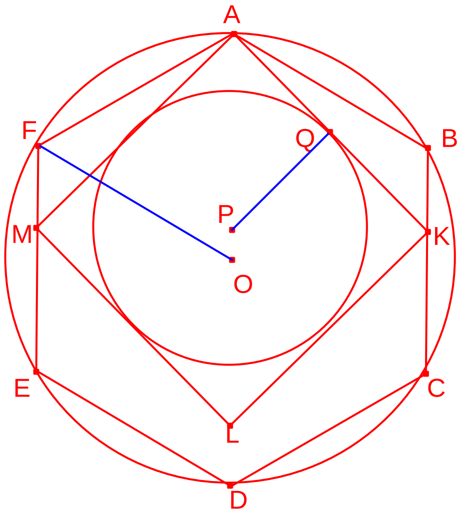


Siguen $A = \alpha, B = 90° - \alpha$
Siga K la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$
Tracem pel punt D una paral·lela al costat $\overline{BC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt E.
$\angle ADE = 90°$
$\overline{DE} = \overline{BC} = 15, \overline{BE} = \overline{CD} = 4$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$\overline{AE} = 17$
$x = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = 17 + 4 = 21$

2856.- Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga la circumferència de centre O circumscrita a l'hexàgon regular $ABCDEF$ de radi
$\overline{OF} = R$
$\overline{AF} = R$
Siga el quadrat $AKLM$.
Siga la circumferència inscrita al quadrat $AKLM$ de radi
$\overline{PQ} = r$
$\overline{AM} = 2r$



$\angle FAM = 15°, \angle MFA = 120°, \angle FMA = 15°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AFM}$:

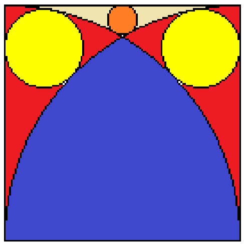
$$\frac{R}{\sin 45°} = \frac{2r}{\sin 120°}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

2857.- Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$.

Siga O el centre de la circumferència gran de radi $\overline{OT} = R$

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.

Siga K la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$

Siga $\overline{OK} = a$

$\overline{AO} = c - R, \overline{OB} = c + R, \overline{BM} = \frac{1}{2}c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKO}$:

$a^2 = (c - R)^2 - R^2$

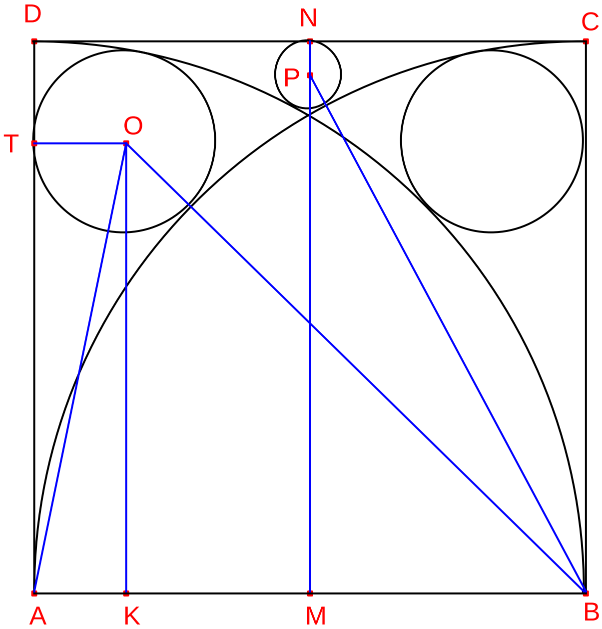
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKO}$:

$a^2 = (c + R)^2 - (c - R)^2$

Igualant les expressions i simplificant:

Simplificant:

$R = \frac{1}{6}c$



Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PN} = r$

$\overline{PM} = c - r, \overline{AP} = c + r, \overline{AM} = \frac{1}{2}c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$(c + r)^2 = (c - r)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2$

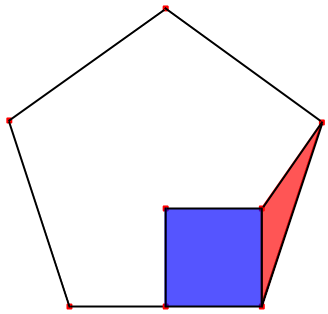
Simplificant:

$r = \frac{1}{16}c$

La proporció entre els radis és:

$\frac{r}{R} = \frac{3}{8}$

2858.- Donat el pentàgon regular s'han dibuixat el quadrat blau i el triangle roig de la figura.
Determineu la proporció entre l'àrea del quadrat i dues vegades l'àrea del triangle.



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $BKLM$ de costat $\overline{BL} = \frac{1}{2}c$
L'àrea del quadrat és:

$$S_{BLKM} = \frac{1}{4}c^2$$

$$\angle KBC = 18°$$

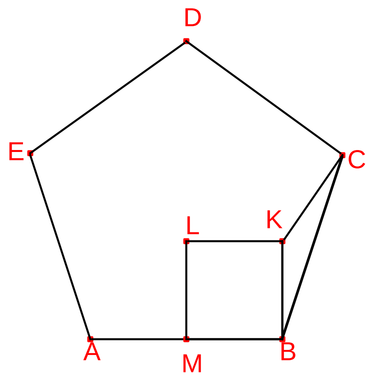
$$\sin 18° = \frac{\frac{1}{2}}{\Phi} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2\Phi}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCK}$ és:

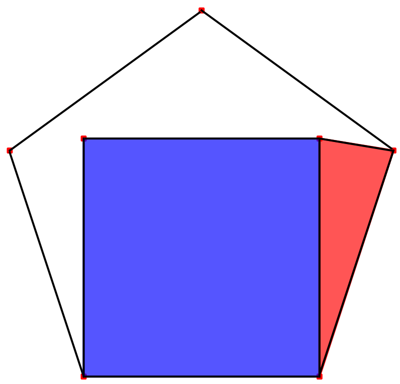
$$S_{BCK} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}c \cdot \sin 18° = \frac{1}{8\Phi}c^2$$

La proporció de les àrees és:

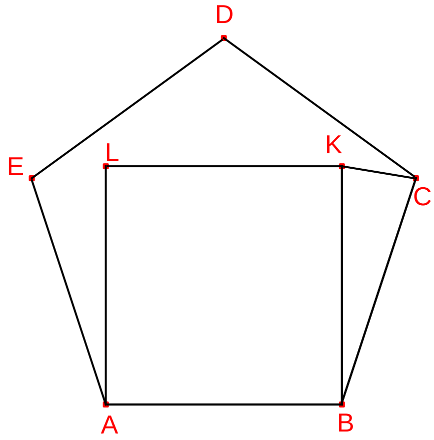
$$\frac{S_{BLKM}}{2 \cdot S_{BCK}} = \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{8\Phi}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



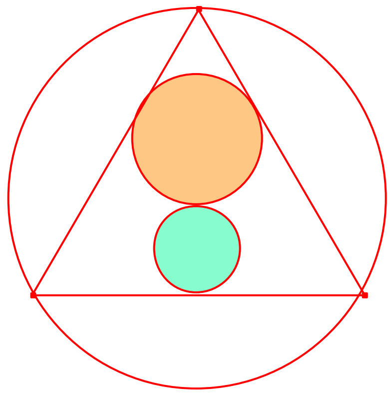
2859.- Donat el pentàgon regular s'han dibuixat el quadrat blau i el triangle roig de la figura. Determineu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del triangle.



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $ABKL$ de costat $\overline{AB} = c$
L'àrea del quadrat és:
$S_{BLKM} = c^2$
$\angle KBC = 18°$
$$\sin 18° = \frac{\frac{1}{2}}{\Phi} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2\Phi}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCK}$ és:
$$S_{BCK} = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \sin 18° = \frac{1}{4\Phi} c^2$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ABKL}}{S_{BCK}} = \frac{1}{\frac{1}{4\Phi}} = 4 \cdot \Phi = 2\left(1 + \sqrt{5}\right)$$



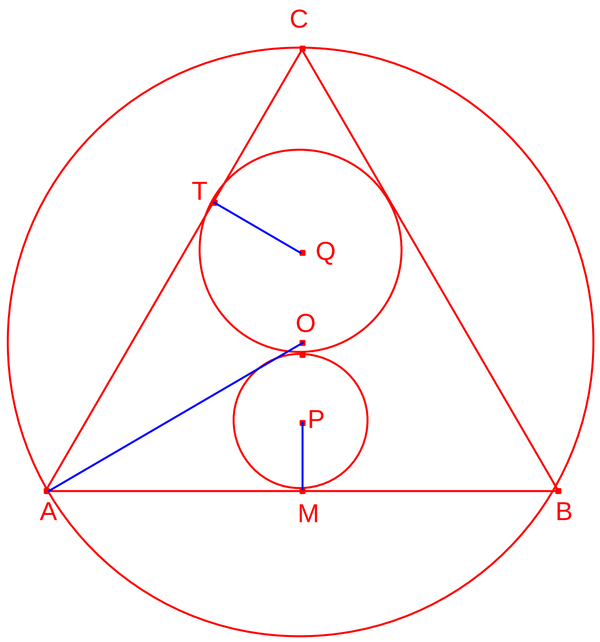
2860.- En l'interior d'un triangle equilàter s'ha dibuixar dos cercles tangents que tenen la suma d'àrees mínima.
El radi de la menuda és r.
Calculeu la proporció de r i el radi de la circumferència circumscrita al triangle equilàter.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costaat $\overline{AB}$
Siga la circumferència circumscrita al triangle equilàter de centre O i radi

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$



Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$
$\overline{CQ} = 2s$

$$\overline{CM} = 2r + 3s, \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{3}{2}R$$

$$s = \frac{\frac{3}{2}R - 2r}{3}$$

L'àrea dels les circumferències de radis r, s és:

$$S = \pi r^2 + \pi s^2 = \pi\left(r^2 + \frac{9R^2 + 16r^2 - 24Rr}{36}\right)$$

$$S = \frac{\pi}{36}(52r^2 - 24Rr + 9R^2)$$

La funció és una paràbola.
El mínim de la funció s'assoleix quan:

$$r = \frac{24}{2 \cdot 52} = \frac{3}{13}$$

Notem també que $\frac{r}{s} = \frac{2}{3}$