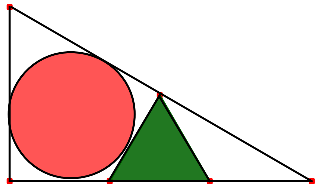
Problemes de Geometria per a l’ESO 287

2861.- El catet menut del triangle rectangle és c.
Calculeu el radi de la circumferència i el costat del triangle equilàter.
Prefectura Ehime



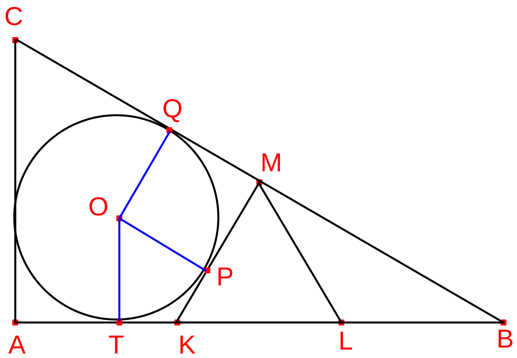
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = c$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OP} = \overset{\frown}{OQ} = r$ inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL} = x$
Siga $\angle ABC = \alpha$
$\angle OQM = \angle OPM = 90°$
A més a més, $\overline{OM}$ és perpendicular a $\overline{PQ}$
Aleshores, $OPMQ$ és un quadrat.
$\angle KMQ = 90°$
$\angle MKB = 60°$
Aleshores, $\angle ABC = \alpha = 30°$
$\overline{BC} = 2a, \overline{AB} = a\sqrt{3}$
Aleshores, el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

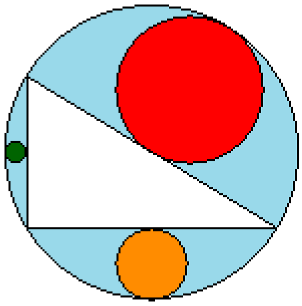
$$r = \overline{OT} = \frac{c + c\sqrt{3} - 2c}{2} = \left(-1 + \sqrt{3}\right)c$$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CAK}, \overset{\Delta}{CMK}$ són iguals (ACA)
Aleshores, $\overline{AK} = \overline{KM} = x$
$\angle LBM = \angle LMB = 30°$
Aleshores, $\overline{BL} = \overline{LM} = x$
$\overline{AB} = 3x = c\sqrt{3}$
Aleshores,

$$x = \overline{KL} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$

2862.- Un triangle rectangle està inscrit en una circumferència.
S’han dibuixat tres circumferències tangents a la circumferència anterior i als costats del triangle.
Siguen r_1, r_2 els radis de les circumferències tangents als catets.
Siga R el radi de la circumferència tangent a la hipotenusa.
Determineu la relació entre els tres radi.
Prefectura Nagasaki

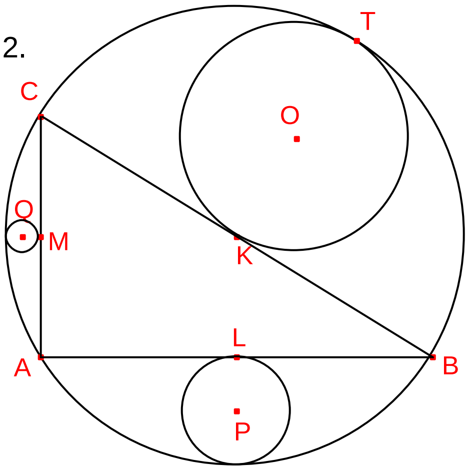


Solució:

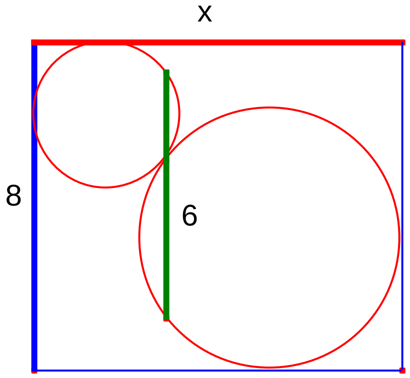
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$
Siguen K, L, M els punts de tangència al triangle.
Els punts $K, , M$ són punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ del triangle.
Siguen $\overline{OK} = R, \overline{PL} = r_1, \overline{QM} = r_2$
El radi de la circumferència circumscrita és:
$\overline{KB} = \overline{KT} = 2R$

Aplicant el teorema de Pitpagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$16R^2 = b^2 + c^2$

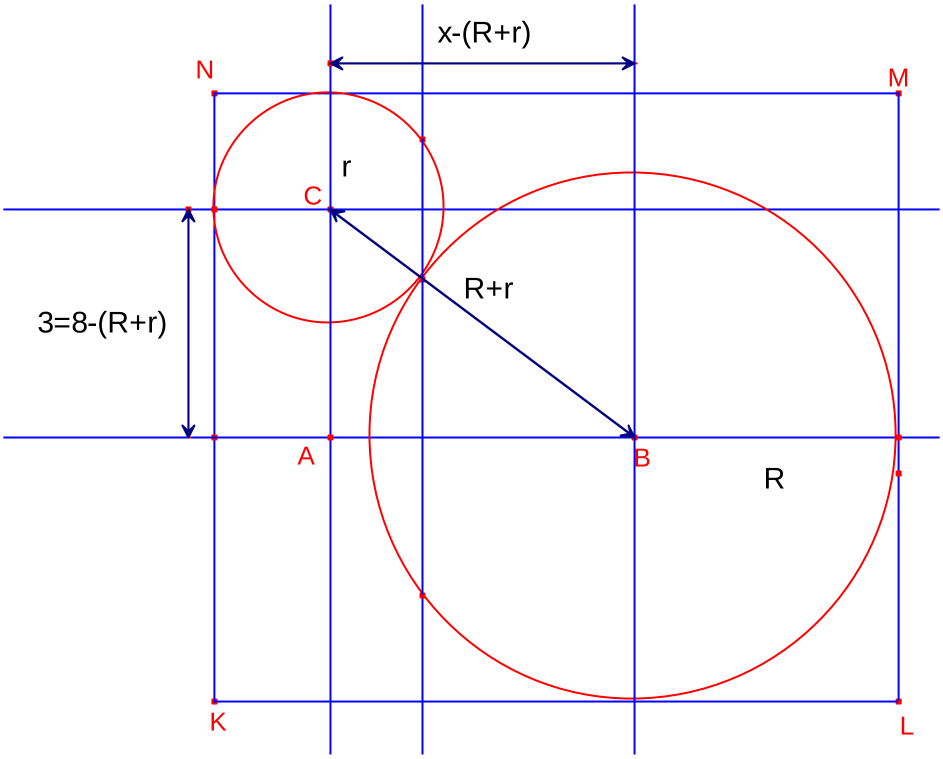
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LBK}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 1:2.
$\overline{KL} = \frac{b}{2} = 2R - 2r_1$
$b = 4R - 4r_1$
Anàlogament:
$c = 4R - 4r_2$
$16R^2 = b^2 + c^2 = 16(2R^2 + {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1R - 2r_2R)$
Simplificant:
$R^2 + {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2(r_1 + r_2)R = 0$
Resolent l’equació:
$R = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 \cdot r_2}$



2863.- En la següent figura determineu el valor de x.



Solució:



Siga el rectangle $KLMN, \overline{MN} = x, \overline{KN} = 8$
Siga R el radi de la circumferència inferior de centre B
Siga r el radi de la circumferència superior de centre C.
La recta perpendicular a $\overline{KN}$que passa per B i la recta perpendicular a $\overline{MN}$ que passa per C es tallen en el punt A.

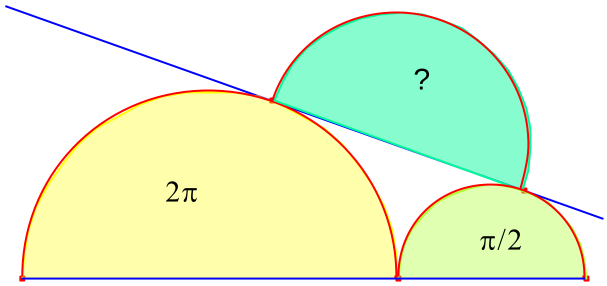
$$\overline{AC} = 8 - (R + r) = \frac{1}{2}6 = 3$$

Simplificant:
$R + r = 3$

$\overline{AB} = x - (R + r) = x - 5, \overline{BC} = R + r = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{Ab} = x - 5 = 4$
$x = 9$

2864.- Dos semicercles tangents i amb els centres alineats tenen àrees $2\pi, \frac{\pi}{2}$, respectivament.
Calculeu l'àrea del semicercle que té el diàmetre en els punts de tangència de la recta tangent a les dues semicircumferències.



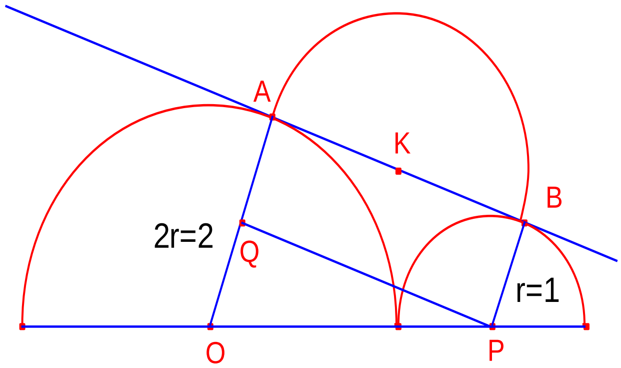
Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PB} = r$
Siga Q la projecció de P sobre el radi $\overline{OA}$
La proporció de les àrees dels semicercles és iguals al quadrat de la proporció dels radis:

$$\frac{S_0}{S_p} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Aleshores, $R = 2r$
L'àrea del semicercle de centre P és:

$$S_P = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}$$

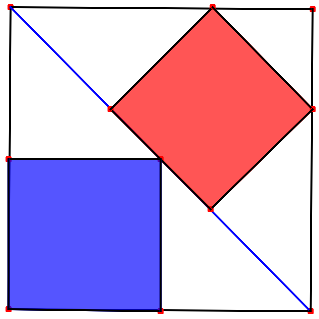
Aleshores, $r = 1$
$\overline{OQ} = 2r - r = 1, \overline{OP} = 2r + r = 3$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$\overline{PQ} = \overline{AB} = 2\sqrt{2}$
Siga K el centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$:
$\overline{KA} = \sqrt{2}$
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ és:

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi$$

2865.- Calculeu la proporció entre el quadrat blau i el quadrat roig que estan en l'interior del quadrat.

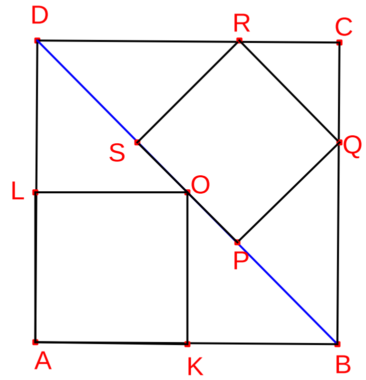


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.
Siga el quadrat $AKOL$.
L'àrea del quadrat $AKOL$ és

$$S_{AKOL} = \frac{1}{4}$$

Siga el quadrat $PQRS$ de costat $\overline{PQ} = x$

$$\overline{BD} = \sqrt{2}$$



$$\overline{PB} = \overline{PQ} = \frac{\sqrt{2} - x}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} - x}{2} = x$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

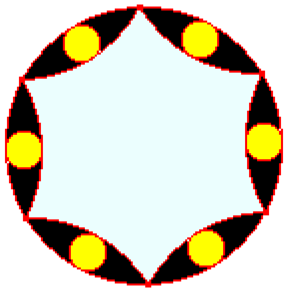
L'àrea del quadrat $PQRS$ és:

$$S_{PQRS} = x^2 = \frac{2}{9}$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{AKOL}}{S_{PQRS}} = \frac{9}{8}$$

2866.- Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels sis cercles iguals tangents a dotze arcs iguals de circumferència i l'àrea del cercle exterior.
Prefectura Nagaski



Solució:
La intercsecció dels dotze arcs forma un hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.
Siga la circumferència tangent a dos arcs de centre P i radi $\overline{PT} = r$

$$\overline{OP} = R - r, \overline{AB} = \frac{1}{2}R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$

$$R^2 = (R - r)^2 + \frac{1}{4}R^2$$

Simplificant:

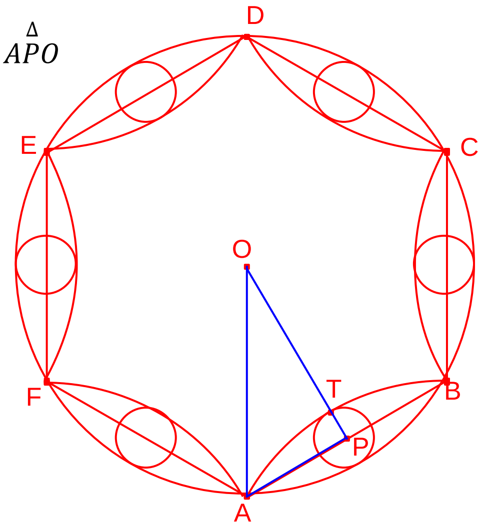
$$4r^2 - 8Rr + R^2$$

Resolent l'equació:

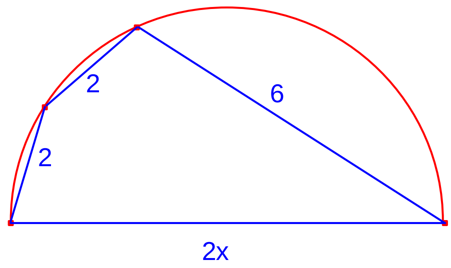
$$r = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}R$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{6 \cdot S_P}{S_O} = \frac{6 \cdot r^2}{R^2} = \frac{3}{2}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$$



2867.- Donada la semicircumferència de diàmetre $2x$ s'han dibuixat tres cordes de longituds, $6, 2, 2$. Calculeu $x^3 - 11x$



Calculeu x³-11x

Solució:

Siguen $\overline{AB} = 2x, \overline{BC} = 6, \overline{CD} = 2, \overline{AD} = 2$

El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és equilàter. Aplicant el teorema de Pitàgores:

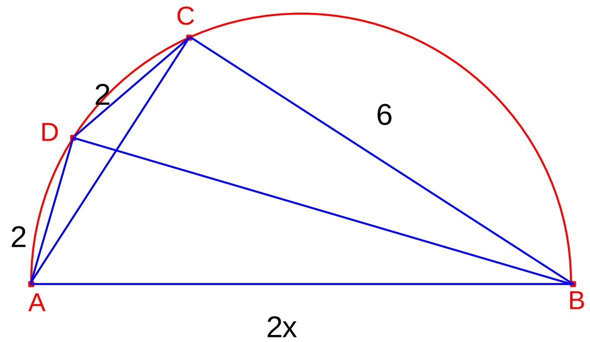
$\overline{BD} = \sqrt{4x^2 - 4}$

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AC} = \sqrt{4x^2 - 36}$

El quadrilàter ABCD és inscriptible.
Aplicant el teorema de Tolomeu:

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$



$4x + 12 = \sqrt{4x^2 - 4} \cdot \sqrt{4x^2 - 36}$

$(x+3)^2 = (x^2 - 1)(x+3)(x-3)$

Simplificant:

$x^3 - 3x^2 - 2x = 0$

$x^2 = 3x + 2$

$x^3 = x(3x + 2)$

$x^3 = 3x^2 + 2x$

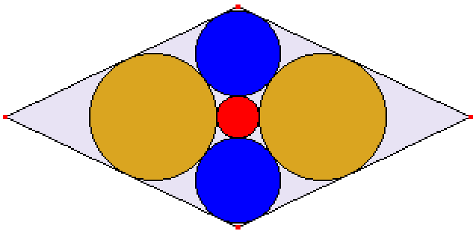
$x^3 = 3(3x + 2) + 2x$

$x^3 = 11x + 6$

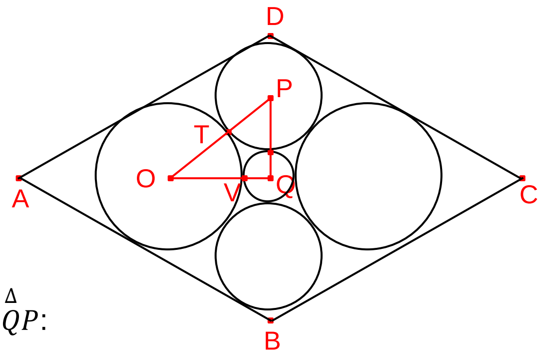
Aleshores:

$x^3 - 11x = 6$

2868.- Quatre circumferències de radis R, r són tangents als costats d'un rombre.
Una cinquena circumferència de radi s és tangent a les quatre anteriors.
Calculeu el valor del radi R en funció dels radis r, s
Prefectura de Nagano



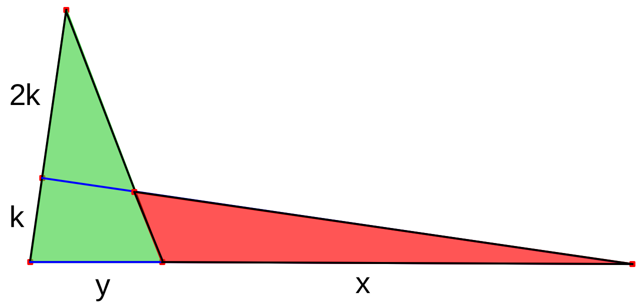
Solució:
Siga el rombe $ABCD$.
Siga la circumferència de centre O i radi $R = \overline{OT}$.
Siga la circumferència de centre P i radi $r = \overline{PT}$
Siga la circumferència de centre Q i radi $s = \overline{QV}$



$\overline{OQ} = R + s, \overline{PQ} = r + s, \overline{OP} = R + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$(R + r)^2 = (r + s)^2 + (R + s)^2$
Simplificant:
$Rr = s^2 + rs + Rs$
Resolent l'equació en la incògnita R:
$$R = \frac{s(r + s)}{r - s}$$

2869.- En la figura l'àrea verda és igual a l'àrea roja.
Calculeu la proporció:
$\frac{x}{y}$



Solució:

Siga el triangle verd $\overset{\Delta}{ABC}$

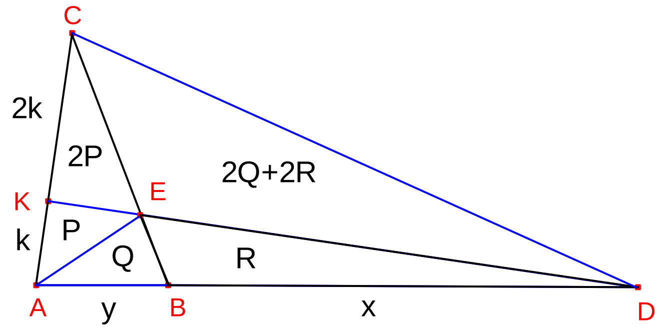
Siga el triangle roig $\overset{\Delta}{BDE}$

Siga K del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AK} = k, \overline{CK} = 2k$

Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEK}$

Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$

Siga R l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$



L'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}$ són iguals:
$3P + Q = R$
$Q = R - 3P$

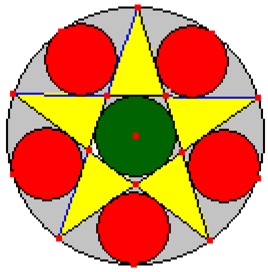
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:
$S_{KEC} = 2P$
$S_{CED} = 2Q + 2R$

$$\frac{3P}{Q} = \frac{2Q + 2R}{R} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$$

$$\frac{3P}{R - 3P} = \frac{2(2R - 3P)}{R}$$

Simplificant:
$18P^2 - 21RP + 4R^2$
Resolent l'equació:
$$P = \frac{7 - \sqrt{17}}{12} R$$
Aleshores,
$$Q = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} R$$
$$\frac{x}{y} = \frac{R}{Q} = \frac{R}{\frac{-3 + \sqrt{17}}{4} R} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

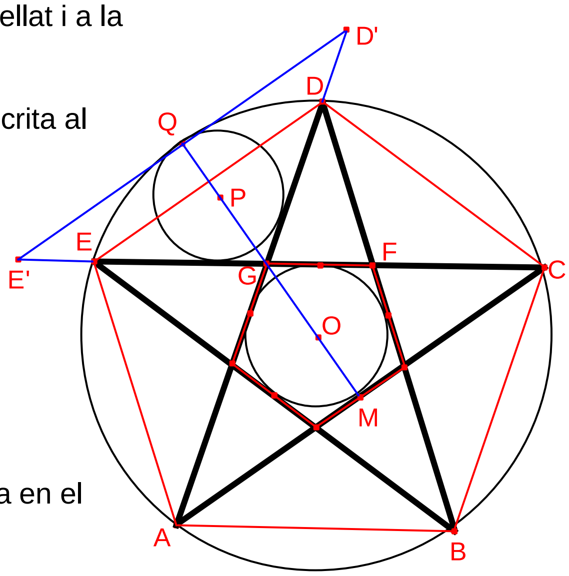
2870.- Considerem el pentàgon regular estrellat i la seua circumferència inscrita de radi r
Siguen les cinc circumferències tangents al pentàgon regular estrellat i a la seua circumferència circumscrita.
Calculeu la proporció:
$\frac{s}{r}$
Prefectura de Nagano



Solució:
Siga $ABCDE$ el pentàgon regular estrellat, de centre O.
Siga $\overline{AB} = 1, \overline{AC} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència circumscrita al pentàgon regular $ABCDE$.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{1}{\sin 36°} = 2R$$

Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència inscrita al pentàgon regular estrellat.
Siga la circumferència tangent al pentàgon regular estrellat i a la circumferència circumscrita de centre P i radi $s = \overline{PQ}$



La circumferència inscrita al pentàgon estrellat està inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ACG}$
Siga $h = \overline{GM}$ l'altura.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACG}$ és:

$$S_{ACG} = \frac{1}{2}(2+\Phi)\mathrm{r} = \frac{1}{2}\Phi \sin 36° = \frac{1}{2}\Phi \cdot h$$

Aleshores:

$$r = \frac{\Phi}{2+\Phi}\sin 36°$$

$$h = \sin 36°$$

La circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = s$ està inscrita en el triangle $\overset{\Delta}{D'E'G}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ACG}, \overset{\Delta}{D'E'G}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{s}{r} = \frac{\overline{GQ}}{h} = \frac{2R-2h}{h} = \frac{\frac{1}{\sin 36°} - 2\cdot \sin 36°}{\sin 36°} = \frac{1}{\sin^2 36°} - 2 = \frac{1}{1-\cos^2 36°} - 2 = \frac{1}{1-\frac{\Phi^2}{4}} - 2$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$