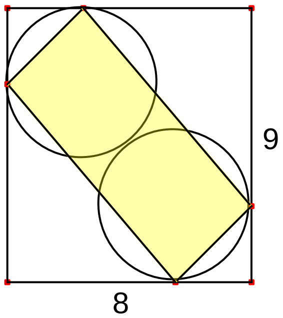
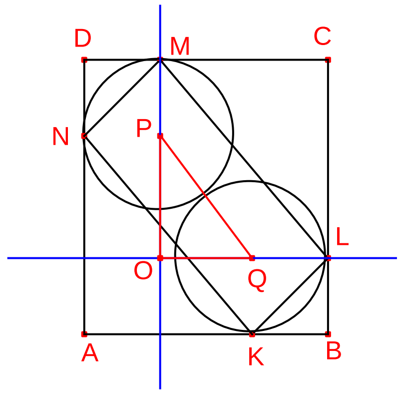
2871.- En un rectangle de costats 8, 9 s'han dibuixat dues circumferències tangents iguals i tangents cadascuna d'elles a dos costats del rectangle.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



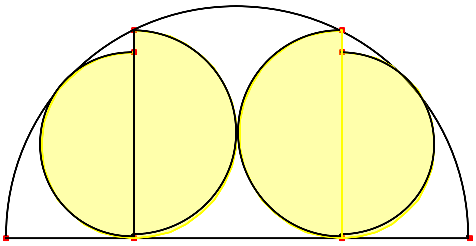
Solució:
Siga e rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 8, \overline{AD} = 9$
Siguen les circumferències iguals de centres P, Q i radi r.
Siga el paral·lelogram $KLMN$.
La recta perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per P i la recta perpendicular al costat $\overline{AD}$ que passa per Q es tallen en el punt O.
$\overline{OP} = 9 - 2r, \overline{OQ} = 8 - 2r, \overline{PQ} = 2r$



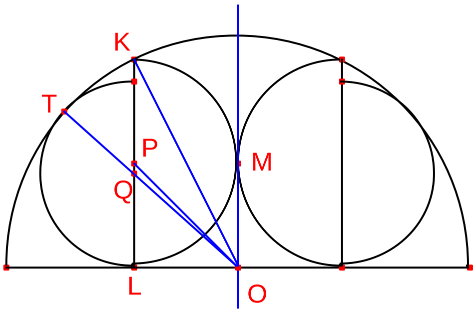
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$4r^2 = (9 - 2r)^2 + (8 - 2r)^2$
Simplificant:
$4r^2 - 68r + 145 = 0$
Resolent l'equació:
$r = \dfrac{5}{2}$
L'àrea del rectangle $KLMN$ és:

$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - (2 \cdot S_{AKN} + 2 \cdot S_{KBL}) = 8 \cdot 9 - \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2}\right) = 30$$

2872.- Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels quatre semicercles ombrejats i el semicercle exterior.



Solució:
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PK} = \overline{PM} = r$
Siga el semicercle exterior de centre O.



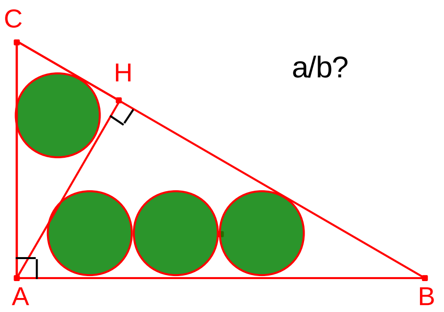
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLO}$:
$\overline{OK} = r\sqrt{5}$ radi del semicercle exterior.

Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QL} = \overline{QT} = s$
$\overline{OQ} = r\sqrt{5} - s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLO}$:
$\left(r\sqrt{5} - s\right)^2 = r^2 + s^2$
Simplificant:
$4r^2 - 2\sqrt{5}rs = 0$
Resolent l'equació:
$s = \frac{2\sqrt{5}}{5}r$
La proporció entre les àrees de la suma dels quatre semicercles ombrejats i el semicercle exterior és:

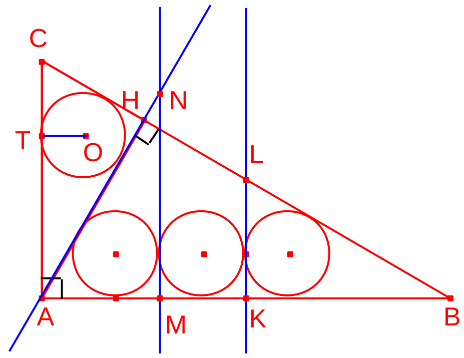
$$\frac{\pi r^2 + \pi s^2}{\frac{1}{2}\pi\left(r\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{1}{2} \cdot 5} = \frac{18}{25}$$

2873.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga $\overline{AH}$ altura del triangle.
Les quatre circumferències ombrejades són iguals.
Calculeu $\frac{a}{b}$



Solució:

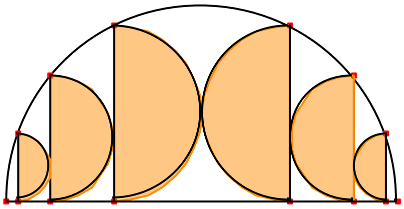
Siiga O el centre de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$ de radi $\overline{OT} = r$
Siga $\overline{AH} = h, \overline{CH} = a$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}, \overset{\Delta}{BAC}$ són semblants.
$\frac{x}{b} = \frac{b}{a}, \frac{h}{b} = \frac{c}{a}$
Aleshores:
$x = \frac{b^2}{a}, h = \frac{bc}{a}$
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$ és:
$r = \frac{x + h - b}{2}$
Pels punts de tangència de les circumferències tangents interiors al triangle $\overset{\Delta}{AHB}$ tracem perpendicular al costat $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}, \overset{\Delta}{AMN}, \overset{\Delta}{BKL}$ són iguals.
$\overline{AM} = x, \overline{MK} = 2r, \overline{BK} = h$

$c = x + 2r + h$
$c = 2x + 2h - b$
$c + b = 2\frac{b^2}{a} + 2\frac{bc}{a}$
$c + b = 2\frac{b}{a}(c + b)$
Simplificant:
$\frac{a}{b} = 2$

2874.- Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels sis semicercles ombrejats i el semicercle exterior.



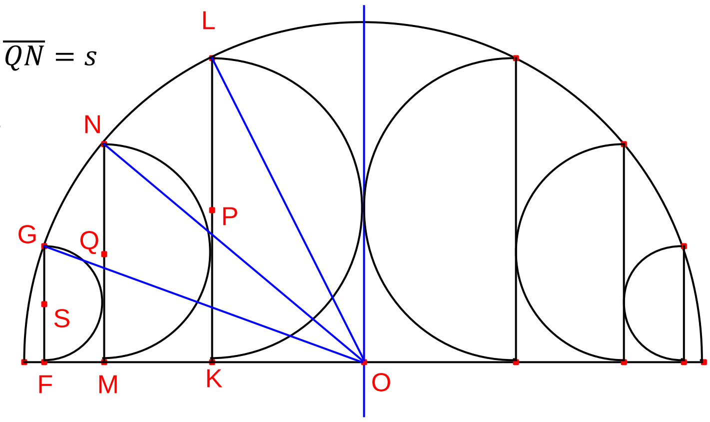
Solució:

Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PL}=\overline{PK}=\overline{PM}=r$

Siga el semicercle exterior de centre O.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLO}$:

$\overline{OK}=r\sqrt{5}$ radi del semicercle exterior.



Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QM}=\overline{QN}=s$

$\overline{OM}=r+s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NMO}$:

$R^2=(r+s)^2+4s^2$

Simplificant:

$5\,s^2+2rs-4r^2=0$

Resolent l'equació:

$$s=\frac{-1+\sqrt{21}}{5}r$$

Siga el semicercle de centre S i radi $\overline{SF}=\overline{SG}=t$

Siga $a=r+s=\frac{4+\sqrt{21}}{5}r$

$\overline{OF}=a+t$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GFO}$:

$R^2=(a+t)^2+4t^2$

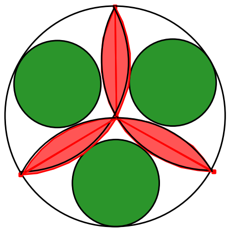
Resolent l'equació:

$$t=\frac{-a+\sqrt{-4a^2+5R^2}}{5}=\frac{-4-\sqrt{21}+\sqrt{477-32\sqrt{21}}}{25}r$$

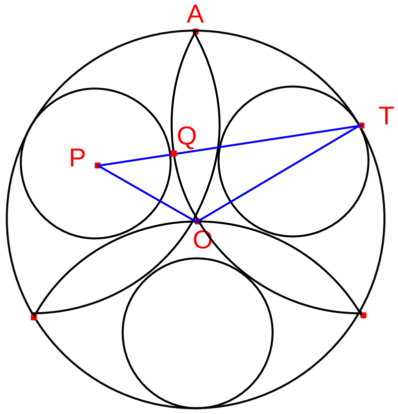
La proporció d'àrees és:

$$\frac{r^2+s^2+t^2}{\frac{1}{2}R^2}\approx 0.664256$$

2875.- En la figura les tres circumferències verdes són iguals i tangents cadascuna d'elles a una circumferència exterior i a dos arcs.
Determineu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.
Prefectura de Yamagata

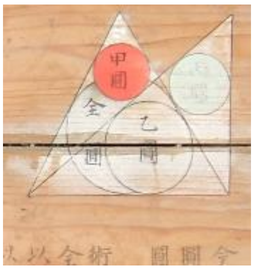


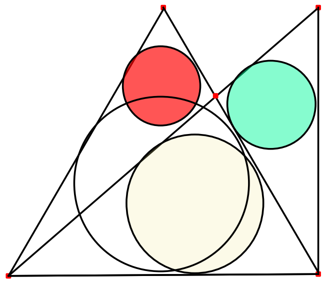
Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$
$\overline{TQ} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = r$
$\angle POT = 120°$
$\overline{PT} = R + r, \overline{OP} = R - r$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OPT}$:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2 - 2''(R - r)R \cdot \cos\ 120°$
Simplificant:
$2R^2 = 5Rr$
Aleshores:
$\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$

2876.- En la figura el costat del triangle equilàter és 1.
El triangle rectangle té el catet vertical igual a l'altura del triangle equilàter.
Calculeu el radi de les tres circumferències ombrejades.
Prefectura Yamagata



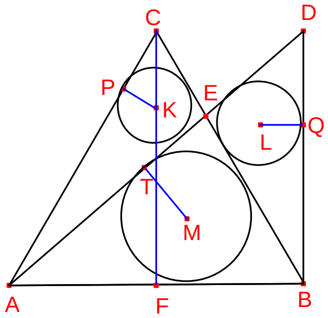


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}, B = 90°, \overline{BD} = \overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Siga E la intersecció dels dos triangles.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Siga $\alpha = \angle DAB$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{14}, \qquad \sin(60° + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KP} = r$. Siga $\overline{CE} = x, \overline{AE} = y$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACE}$

$$\frac{x}{\sin\,(60° - \alpha)} = \frac{1}{\sin(60° + \alpha)}, \qquad \frac{y}{\sin\,60°} = \frac{1}{\sin(60° + \alpha)}$$

Aleshores, $\overline{CE} = x = \frac{1}{3}, \overline{AE} = y = \frac{\sqrt{7}}{3}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}r\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{21}}{18}$$

Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LQ} = s$

$$\overline{BE} = \frac{2}{3}, \overline{DE} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}s\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{6}\right)$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{\sqrt{21} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - 1}{12}$$

Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MT} = t$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

Resolent l'equació:

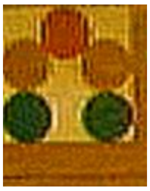
$$t = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{21}}{18}$$

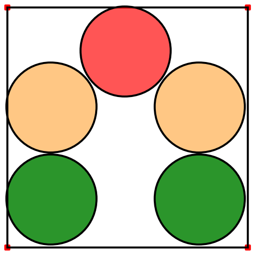
2877.- Cinc circumferències iguals de radi r estan en l'interior d'un quadrat de costat c

Calculeu

$\frac{r}{c}$

Prefectura de Hyogo



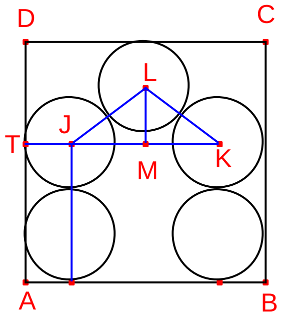


Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen J, K, L centres de tres circumferències de de radi $\overline{JT} = r$

Siga M el punt mig del segment $\overline{JK}$



$\overline{JL} = 2r, \overline{JM} = \frac{c}{2} - r, \overline{LM} = c - 4r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JML}$

$4r^2 = (c - 4r)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$

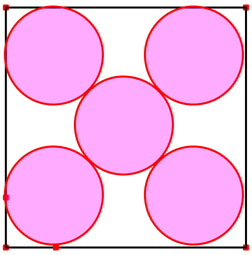
Simplificant:

$13r^2 - 9cr + \frac{5}{4}c^2 = 0$

Resolent l'equació:

$\frac{r}{c} = \frac{5}{26}$

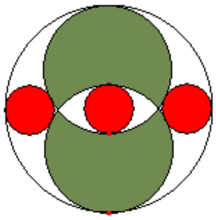
L'empaquetament òptim (màxim radi) en un quadrat de cinc cercles és:



La proporció del radi i el costat és:

$\frac{r}{c} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

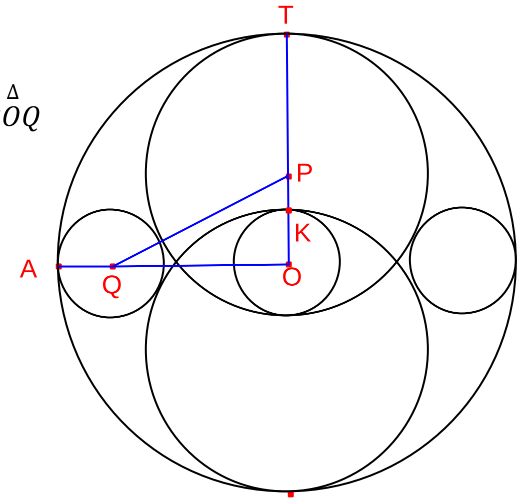
2878.- En una circumferència s'ha dibuixat 5 circumferències.
Les tres roges iguals i les altres dos iguals i tangents interiors.
Calculeu la proporció entre els radis.
Prefectura de Hyogo



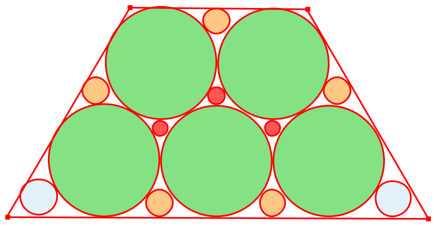
Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$
Siga P el centre de la circumferència de radi $\overline{PT} = r$
Siga Q el centre de la circumferència de radi $\overline{QA} = s$
Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OK} = s$

Notem que $2r - s = R$
$\overline{OP} = r - s, \overline{OQ} = R - s = 2r - 2s, \overline{PQ} = r + s$

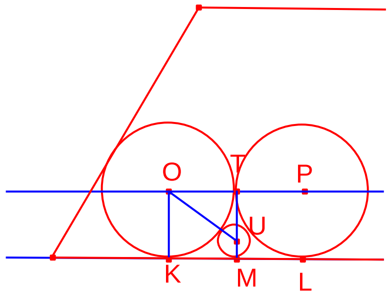
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POQ}$
$(r+s)^2 = (r-s)^2 + 4(r-s)^2$
Simplificant:
$$\frac{r+s}{r-s} = \sqrt{5}$$
Resolent l'equació:
$$\frac{s}{r} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$R = 2r - \frac{3-\sqrt{5}}{2}r$$
$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$
$$\frac{R}{s} = 2 + \sqrt{5}$$



2879.- El radi de les cinc circumferències verdes tangents als costats del trapezi és r, calculeu el radi dels altres tres tipus de circumferències.
Prefectura de Gunma

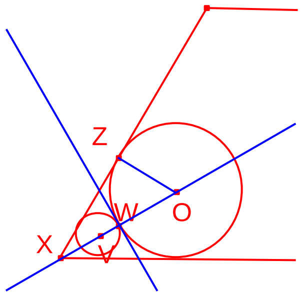


Solució:
Siguen les circumferències de centres O, P i radis $\overline{OK} = \overline{PL} = r$
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga L el punt mig del segment $\overline{KL}$
Siga la circumferència de centre U i radi $\overline{UM} = s$
$\overline{TU} = r - s, \overline{OT} = r, \overline{OU} = r + s$

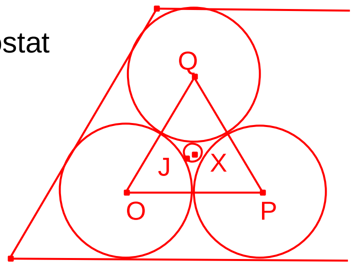


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTU}$:
$(r+s)^2 = r^2 + (r-s)^2$
Resolent l'equació:
$$s = \frac{1}{3}r$$

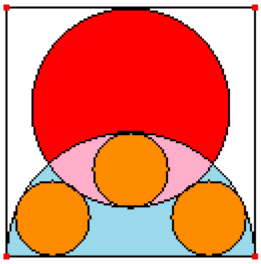
Siga la circumferència de centre V i radi $\overline{VW} = t$
Siga Z el punt de tangència de la circumferència de centre O i el costat no paral·lel del trapezi.
$\overline{OX} = 2 \cdot \overline{OZ} = 2r$
$\overline{XW} = r$
$$t = \overline{VW} = \frac{1}{3}\overline{XW} = \frac{1}{3}r$$



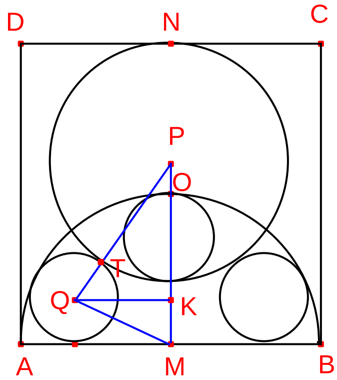
Siga la circumferència de centre Q i radi r.
Siga la circumferència de centre X i radi $\overline{XJ} = x$
El centre X és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPQ}$ de costat $\overline{OP} = 2r$
$$\overline{OX} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$$
$$x = \overline{XJ} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r - r = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}r$$



2880.- Donat un quadrat de costat $2a$ dibuixen un semicercle sobre el costat inferior com diàmetre.
Construïm una circumferència de radi R de centre la mediatriu del diàmetre del semicercle i tangent al costat superior.
Tres circumferències de radi r són tangents a la semicircumferència i a la circumferència anterior.
Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferència.
Prefectura d'Iwate.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$ i centre O.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PN} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$



Siga K la projecció ortogonal de Q sobre $\overline{PM}$.
$2r = a + 2s$

$$\overline{PQ} = r + s = \frac{a}{2} + 2s, \overline{MQ} = a - s, \overline{MK}, \overline{PK} = 2a - r - s = \frac{3a}{2} - 2s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKM}$:
$\overline{QK}^2 = (a-s)^2 - s^2 = a^2 - 2as$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$$\overline{QK}^2 = \left(\frac{a}{2} + 2s\right)^2 - \left(\frac{3a}{2} - 2s\right)^2 = -2a^2 + 8as$$
Igualant les dues expressions:
$a^2 - 2as = -2a^2 + 8as$
Resolent l'equació:
$$s = \frac{3}{10}a$$
Aleshores, $r = \frac{4}{5}a$
La proporció entre els radis dels dos tipus de circumferència és:
$$\frac{s}{r} = \frac{3}{8}$$