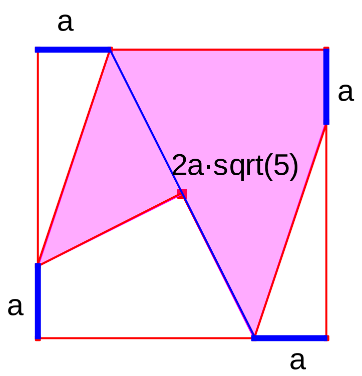
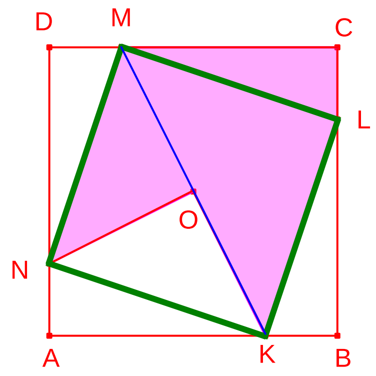
2881.- Els costats del quadrat de la figura s'han dividit en dos parts. Cadascuna de les parts dividides mesura $a$.
Una de les distàncies entre dos extrems d'aquestes és $2a\sqrt{5}$
Calculeu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i el quadrat.




Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$ de centre $O$.
Siguen els punts $K, L, M, N$ dels costat tal que $\overline{BK} = \overline{CL} = \overline{DM} = \overline{AN} = a$
$KLMN$ és un quadrat.

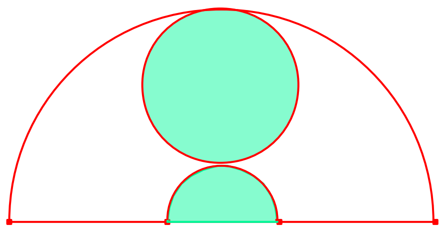



Aplicant el teorema de PItàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KLM}$:
$\overline{KL} = a\sqrt{10}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBL}$:
$\overline{BL} = 3a$
$\overline{AB} = 4a$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KLMNO}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{4}S_{KLMN} + S_{LCM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{4}\left(a\sqrt{10}\right)^2 + \frac{1}{2}a \cdot 3a}{(4a)^2} = \frac{9}{16}$$

2882.- En una semicircumferència s'ha dibuixat una semicircumferència amb el mateix centre y una circumferència tangent a les dues semicircumferències en els punts migs dels arcs. Calculeu la proporció mínima de sa suma de les àrees ombrejades i l'àrea del semicercle exterior.



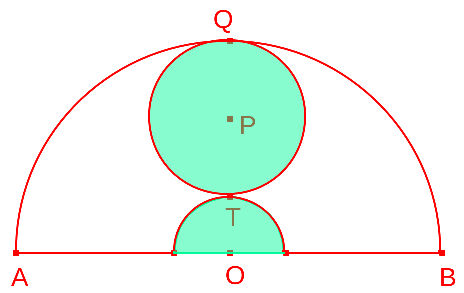
Solució:

Siga la semicircumferència de centre $O$ i radi $\overline{OA} = 1$

Siga la semicircumferència de centre $O$ i radi $\overline{TO} = x$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = \frac{1-x}{2}$

La proporció de les àrees és:




$$p(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}1^2}$$

$$p(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 1)$$

La funció és una paràbola còncava.

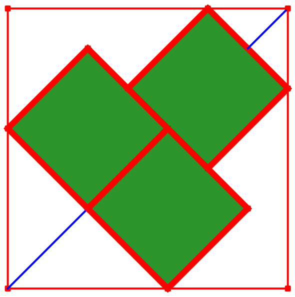
Els mínim s'assoleix en el vèrtex:

$$x = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

La proporció mínima és:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

2883.- En un quadrat s'han inscrit tres quadrats iguals. Calculeu la proporció de les àrees de la suma dels tres quadrats ombrejats i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = x$

$\overline{AK} = x, \overline{KJ} = 2x, \overline{CJ} = \frac{1}{2}x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC} = \sqrt{2}$

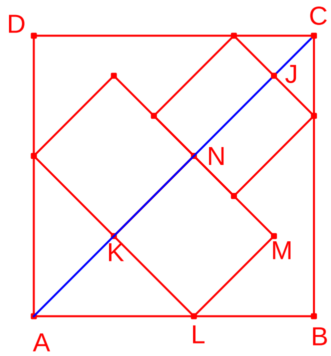
$$\sqrt{2} = \left(3 + \frac{1}{2}\right)x$$

Resolent l'equació:

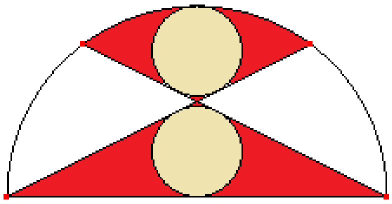
$$x = \frac{2}{7}\sqrt{2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{3 \cdot S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot x^2}{1^2} = 3 \cdot \frac{8}{49} = \frac{24}{49}$$

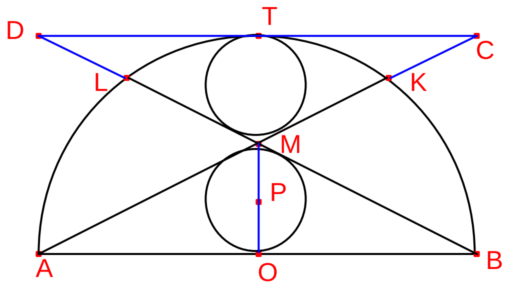


2884.- En un semicercle de radi R s'ha inscrit dues circumferències iguals (veure figura).
Calculeu el radi de les circumferències.
*Prefectura de Aichi*



Solució:
Siguen el segments $\overline{AK}, \overline{BL}$ que s'intersecten en el punt $M$.
Siga la semicircumferència de centre $O$ i radi $\overline{OA} = R$

Siga la circumferència de centre $P$ i radi $\overline{PO} = r$, inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$
Siga $T$ el punt de tangència de la circumferència superior i la semicircumferència.
Pel punt $T$ tracem una paral·lela al diàmetre $\overline{AB}$ que talla les rectes $AK, BL$ en els punts $C, D$, respectivament.




Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{CDM}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{OM} = \frac{1}{2}R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOM}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

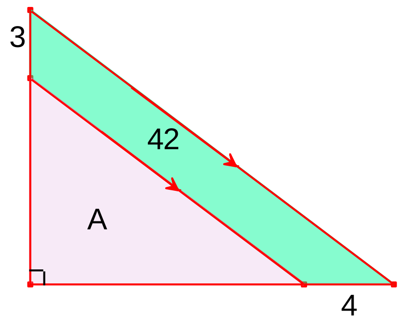
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}\left(2R + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}R\right)r$$

Resolent l'equació:

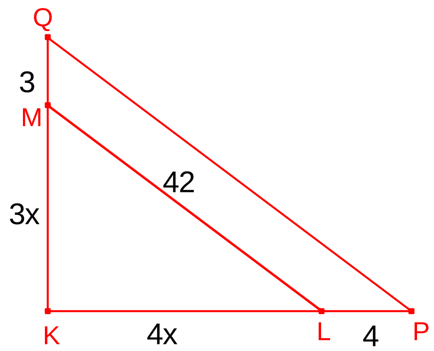
$$r = \left(\sqrt{5} - 2\right)R$$

2885.- En la figura calculeu l'àrea del triangle rectangle $A$




Solució:

Siguen els triangles rectangles semblants $\overset{\Delta}{KLM}, \overset{\Delta}{KPQ}$.
Siguen $\overline{MQ} = 3, \overline{LP} = 4, S_{LPQM} = 42$
Siguen $\overline{KM} = 3x, \overline{KL} = 4x$




L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$A = \frac{1}{2} 3x \cdot 4x = 6x^2$$

Les àrees dels triangles semblants $\overset{\Delta}{KLM}, \overset{\Delta}{KPQ}$ són proporcionals al quadrat dels costats:

$$\frac{6x^2}{6x^2 + 42} = \left(\frac{3x}{3x + 3}\right)^2$$

Simplificant:

$$\frac{1}{x^2 + 7} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

$$x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1$$

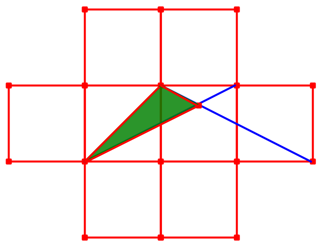
Resolent l'equació:

$$x = 3$$

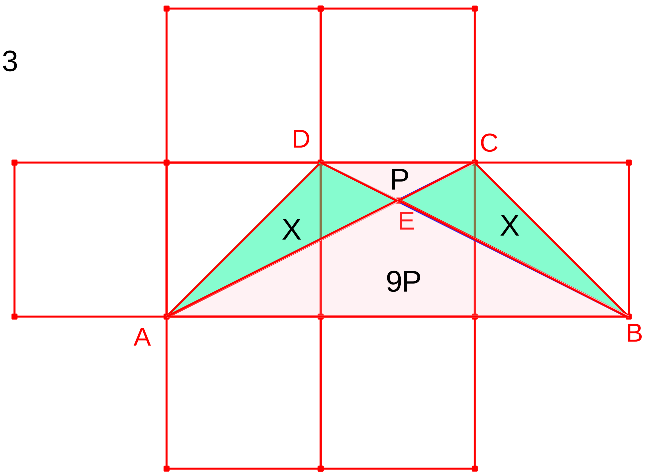
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$A = 6x^2 = 6 \cdot 3^2 = 54$$

2886.- Els costats de la graella mesuren 1.
Calculeu la mesura de l'àrea ombrejada.



Solució:
Siga $X = S_{ADE}$
Siga $P = S_{CDE}$
$S_{BCD} = X$

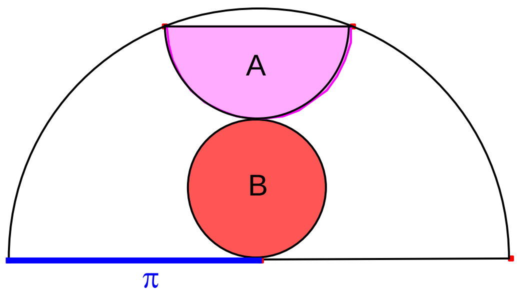



Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{CDE}$ són semblants i de raó 1:3
Aplicant el teorema de Tales:
$S_{ABE} = 9P$

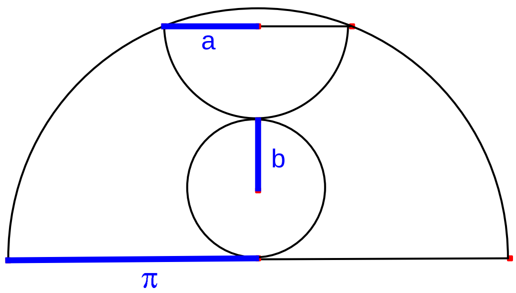
L'àrea del trapezi ABCD és:
$$S_{ABCD} = 10P + 2X = \frac{3+1}{2} \cdot 1 = 2$$
$5P + X = 1$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és:
$$S_{ADC} = P + X = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$
$2P + 2Q = 1$
Considerem el sistema format per les equacions:
$$\begin{cases} 5P + X = 1 \\ 2P + 2X = 1 \end{cases}$$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} X = \dfrac{3}{8} \\ P = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

2887.- Dins d'una semicircumferència de radi $\pi$ s'ha dibuixat un semicercle i un cercle d'àrees $A, B$, respetivament tal que la suma $A+B$ és mínima.




Solució:
Siga a el radi del semicercle d'àrea A.
Siga b el radi del cercle d'àrea B.




$$A+B=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$A+B=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2 \geq 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}a^2\cdot b^2}$$

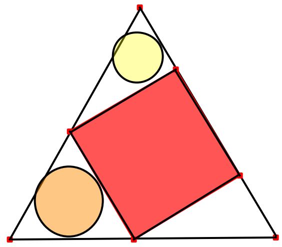
$$A+B \geq 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}a^2\cdot b^2} \geq \pi\sqrt{2}ab$$

La igualtat s'assoleix quan $\frac{1}{2}a^2=b^2$

En aquest cas:

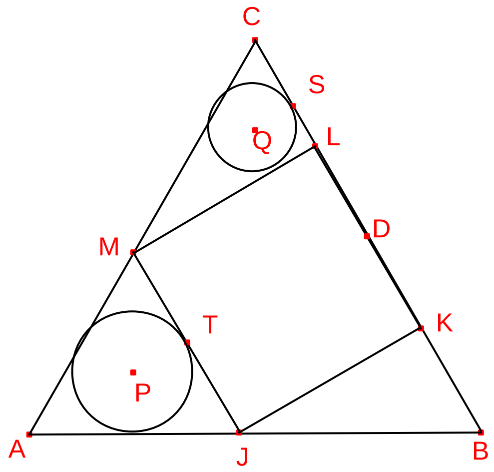
$$A-B=\frac{1}{2}\pi a^2-\pi b^2=\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{1}{2}\pi a^2=0$$

2888.- En un triangle equilàter s’ha inscrit un quadrat. Calculeu la proporció entre els radis de les dues circumferències inscrites als dos triangles exteriors al quadrat.
*Prefectura de Miyagi*



Solució:

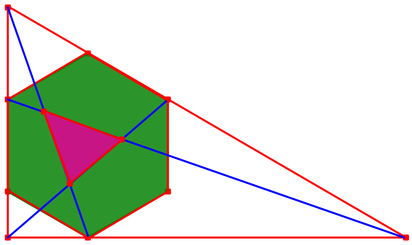
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat JKLM inscrit en el triangle equilàter.
Siga $\overline{JK} = x$ el seu costat.
Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga T el punt mig del costat $\overline{JM}$




$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$
$$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}c = x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
Resolent l’equació:
$$x = \left(-3 + 2\sqrt{3}\right)c$$
Siga $r = \overline{PT}$ radi de la circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{AJM}$
$$r = \overline{PT} = \frac{1}{3}\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(-3 + 2\sqrt{3}\right)c = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}c$$

Siga $s = \overline{QS}$ radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MLC}$
$$s = \frac{\overline{ML} + \overline{LC} - \overline{MC}}{2} = \frac{x - \frac{c - x}{2} - (c - x)}{2} = \frac{-c + 3x}{4} = \frac{-5 + 3\sqrt{3}}{2}c$$
La proporció dels radis és:
$$\frac{s}{r} = \frac{-5 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3}$$

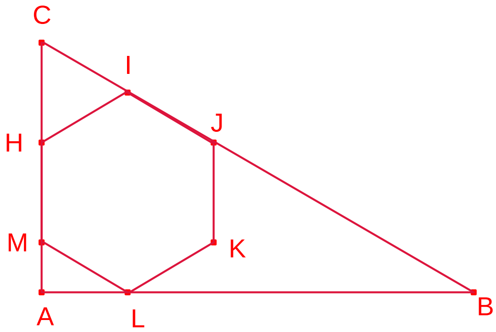
2889.- En un triangle rectangle s'ha inscrit un hexàgon regular (veure figura).
Calculeu la raó de proporcionalitat de les seues àrees.
Els vèrtex del triangle rectangle s'han unit amb vèrtexs de l'hexàgon regular.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle i de l'hexàgon regular.
*Prefectura Iwate*



Solució:

Notem que el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ , $A = 90^o$ , $B = 30^o$, $C = 60^o$

Siga $x = \overline{HI}$ costat de l'hexàgon regular HIJKLM..




Notem que el triangle $\overset{\Delta}{HIC}$ és equilàter.

$\angle ALM = 30^o$ , $\overline{ML} = x$ , aleshores, $\overline{MA} = \frac{x}{2}$ .

$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MH} + \overline{HC} = \frac{x}{2} + x + x = \frac{5}{2}x$ .

$\overline{BC} = 5x$ .

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la meitat de l'àrea d'un triangle equilàter de costat $\overline{BC} = 5x$ :

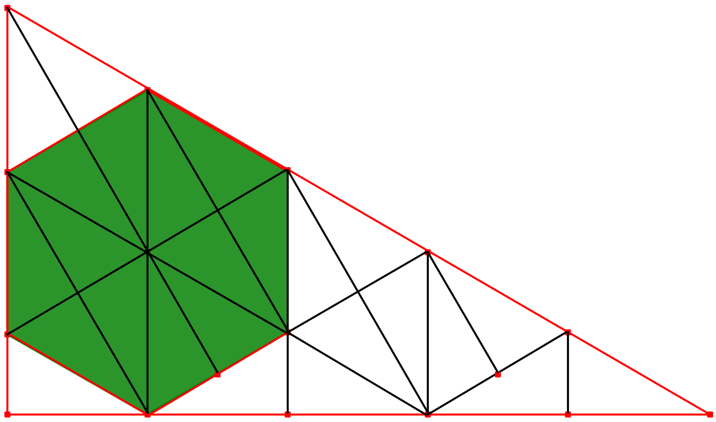
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{(5x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{8}x^2 .$$

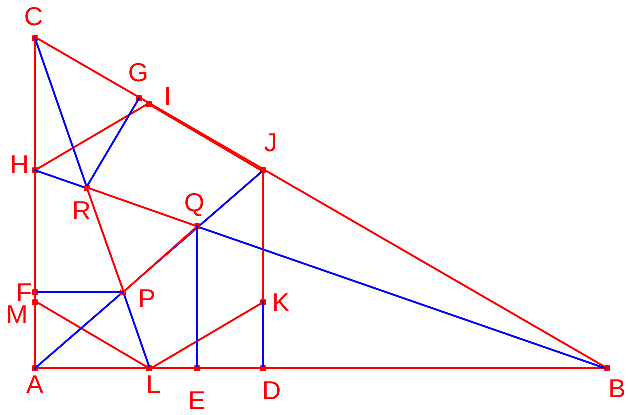
L'àrea de l'hexàgon regular HIJKLM és igual a sis vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat $x = \overline{HI}$ .

$$S_{HIJKLM} = 6\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 .$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon HIJKLM i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\frac{S_{HIJKLM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2}{\frac{25\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{12}{25} .$$






$\overline{AL} = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \overline{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x, \overline{CL} = x\sqrt{7}, \overline{BH} = \sqrt{21}x$

Notem que $\angle ACL = \angle ABH = \beta$, ja que:

$$\tan\beta = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{14}, \cos\beta = \frac{5}{14}\sqrt{7}\,3$$

Siga $\angle JAB = \alpha, \overline{AD} = x\sqrt{3}, \overline{JD} = \frac{3}{2}x, \overline{AJ} = \frac{1}{2}\sqrt{21}x$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos\alpha = \frac{2}{7}\sqrt{7}, \tan\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Siga $\angle PQR = \gamma = \alpha + \beta$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{14} - \frac{\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{1}{2}$$

$\gamma = 60°$

Siga $E$ la projecció de $Q$ sobre $\overline{AB}$. Siga $\overline{AE} = a$

$$\frac{\overline{QE}}{a} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\overline{QE}}{\frac{5}{2}\sqrt{3}x - a} = \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Aleshores:

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{7}x, \overline{QE} = \frac{15}{14}x, \overline{BE} = \frac{25\sqrt{3}}{14}x, \overline{AQ} = \frac{5\sqrt{21}}{14}x, \overline{BQ} = \frac{5\sqrt{21}}{7}x$$

Siga $F$ la projecció de $P$ sobre $\overline{AC}$. Siga $\overline{CF} = b$

$$\frac{\overline{PF}}{b} = \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\overline{PF}}{\frac{5}{2}x - b} = \operatorname{ctan}\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Aleshores:

$$b = \frac{25}{13}x, \overline{PF} = \frac{5\sqrt{3}}{13}x, \overline{AF} = \frac{15}{26}x, \overline{AP} = \frac{5\sqrt{21}}{26}x, \overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \frac{15\sqrt{21}}{91}x$$

Siga $G$ la projecció de $R$ sobre $\overline{BC}$. Siga $\overline{CF} = c$

$$\frac{\overline{RG}}{c} = \tan(60° - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\overline{RG}}{5x - c} = \tan(30° - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Aleshores:

$$c = \frac{10}{11}x, \overline{RG} = \frac{5\sqrt{3}}{11}x, \overline{BR} = \frac{45}{11}x, \overline{BR} = \frac{10\sqrt{21}}{11}x, \overline{QR} = \overline{BR} - \overline{BQ} = \frac{15\sqrt{21}}{77}x$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

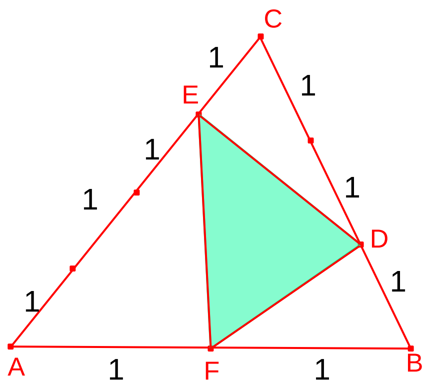
$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin 60° = \frac{1}{2}\cdot\frac{15\sqrt{21}}{91}x\cdot\frac{15\sqrt{21}}{77}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{675}{4004}\sqrt{3}$$

La proporció d'àrees és:

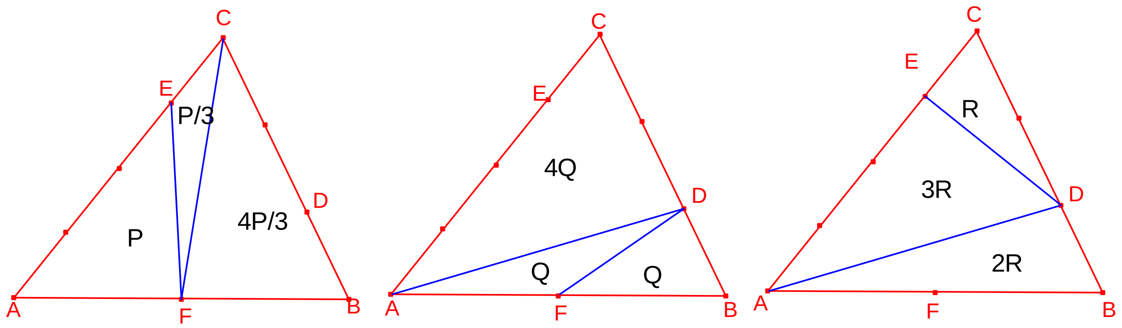
$$\frac{S_{PQR}}{S_{HIJKLM}} = \frac{\frac{675}{4004}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{225}{2002}$$

2890.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
El costat $\overline{AB}$ s`ha dividit en dues parts iguals.
El costat $\overline{BC}$ s`ha dividit en tres parts iguals.
El costat $\overline{AC}$ s`ha dividit en quatre parts iguals.
L'àrea del triangle és 24.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$




Solució:
Siga $S = S_{ABC}$
Siga $P = S_{AFE}, Q = S_{BDF}, R = S_{CDE}$
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:




$$P + \frac{1}{3}P + \frac{4}{3}P = S$$

Aleshores:

$$P = \frac{3}{8}S$$

$$Q + Q + 4Q = S$$

$$Q = \frac{1}{6}S$$

$$R + 2R + 3Q = S$$

$$R = \frac{1}{6}S$$

$$S_{DEF} = S - (P + Q + R) = S - \left(\frac{3}{8}S + \frac{1}{6}S + \frac{1}{6}S\right) = \frac{7}{24}S$$

$$S_{DEF} = \frac{7}{24}S = \frac{7}{24} \cdot 24 = 7$$