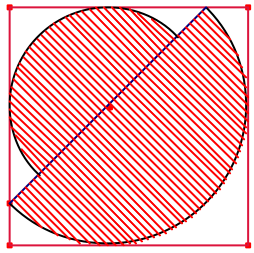
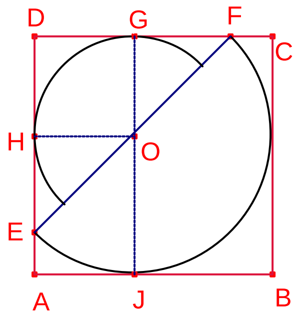
Problemes de Geometria per a l'ESO 29

281.- En la figura s'han inscrit dos semicercles en un quadrat de costat 2.
Els centres dels semicercles estan en la diagonal del quadrat.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.
UKMT. UK SENIOR MATHEMATICAL CHALLENGE, 2010. Problema 23.



Solució:



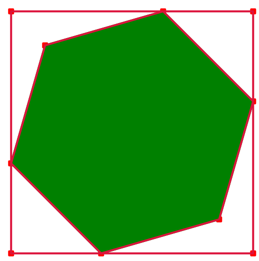
Siga el quadrat ABCD de costat 2.
Si el centre O de les dues circumferències pertany a la diagonal $\overline{BD}$.
El diàmetre $\overline{EF}$ és paral·lel a la diagonal $\overline{AC}$.
Siga $r=\overline{OE}$ radi del semicercle gran.
El semicercle gran és tangent al costat $\overline{AB}$.
Siga J el punt de tangència. Aleshores, $\overline{OJ}=r$
El semicercle menor és tangent als costats $\overline{CD}$, $\overline{AD}$.
Siguen G i H els punts de tangència amb els dos costats, respectivament.
Aleshores, $\overline{OG}=\overline{OH}=2-r$ és el seu radi.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHE}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:
$\overline{HE}=\overline{OH}=2-r$.

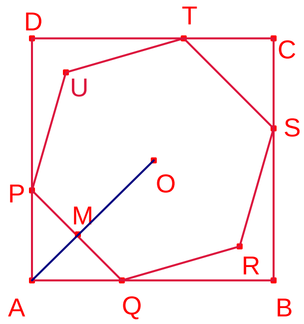
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHE}$:
$r^2=2(2-r)^2$.
Resolent l'equació:
$r=2\left(2-\sqrt{2}\right)$.
El radi del semicercle menut és:
$2\left(-1+\sqrt{2}\right)$.
L'àrea de la zona ombrejada és la suma de les àrees dels dos semicercles:

$$S_{\text{ombrejada}}=\frac{\pi}{2}\left(2\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(2\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)^2=6\pi\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

282.- En la figura hi ha dibuixat un hexàgon regular de costat 1 inscrit en un quadrat.
Dos vèrtex de l'hexàgon estan sobre una diagonal del quadrat i els altres 4 sobre els costats.
Determineu l'àrea del quadrat.
UKMT. UK SENIOR MATHEMATICAL CHALLENGE, 2010. Problema 21.



Solució:



Siga PQRSTU l'hexàgon de diagonal $\overline{RU}$ sobre la diagonal $\overline{BD}$ del quadrat ABCD.
$\overline{PQ}$ és paral·lel a la diagonal $\overline{BD}$.
Siga O el centre del quadrat ABCD i de l'hexàgon PQRSTU.
Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}=1$.

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overline{AM}=\overline{MQ}=\frac{1}{2}$.

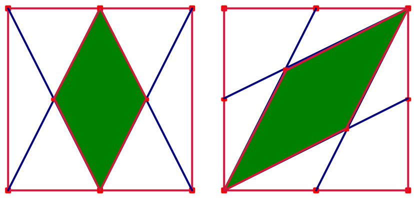
$\overline{OA}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

$\overline{AB}=\sqrt{2}\left(\overline{OA}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

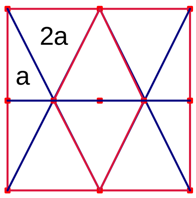
L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD}=\overline{AB}^2=2+\sqrt{3}$.

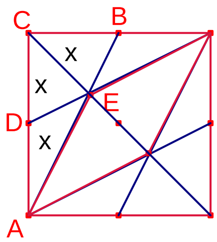
283.- En dos quadrats iguals s’han inscrit dos rombes com mostra la figura.
Determineu la proporció entre les àrees del dos rombes.



Solució:
Siga S l’àrea del quadrat.



El rombe de l’esquerra és $\frac{1}{4}S$.



L’àrea dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DEC}$ són iguals.

Els triangles $\overset{\Delta}{BEC}$, $\overset{\Delta}{DEC}$, aleshores, tenen la mateixa àrea.

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la quarta part de l’àrea del quadrat.

Aleshores, $S_{ADE} = \frac{1}{12}S$.

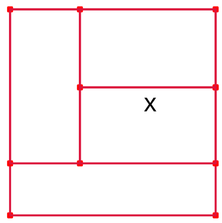
L’àrea del rombe és:

$$S - 8 \cdot S_{ADE} = S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S.$$

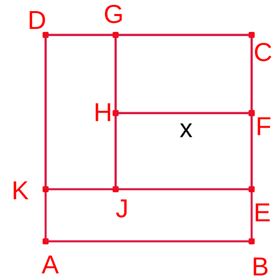
La proporció de les àrees dels dos rombes és:

$$\frac{\frac{1}{4}S}{\frac{1}{3}S} = \frac{3}{4}.$$

184.- En la figura, el quadrat de costat 1 s'ha dividit en quatre rectangles d'igual àrea.
Quant mesura x?.
UKMT. UK SENIOR MATHEMATICAL CHALLENGE, 2010. Problema 12.

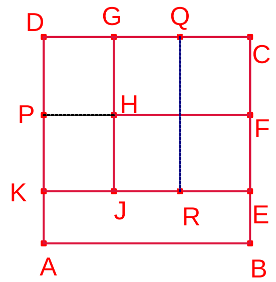


Solució 1:
Si els rectangles JEFH FCGH tenen la mateixa àrea, aleshores,
$\overline{CF} = \overline{FE} = a$.
$\overline{DG} = 1 - x$, $\overline{BE} = 1 - 2a$.
Com els rectangles JEFH, KJGD tenen la mateixa àrea:
$xa = 2a(1-x)$.
Simplificant:
$x = 2(1-x)$. Resolent l'equació:
$x = \frac{2}{3}$.

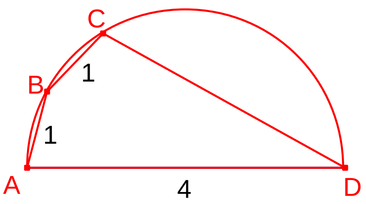


També podem calcular a:
Com els rectangles JEFH, ABEK tenen la mateixa àrea:
$xa = 1(1-2a)$.
$\frac{2}{3}a = 1 - 2a$.
Resolent l'equació:
$a = \frac{3}{8}$.

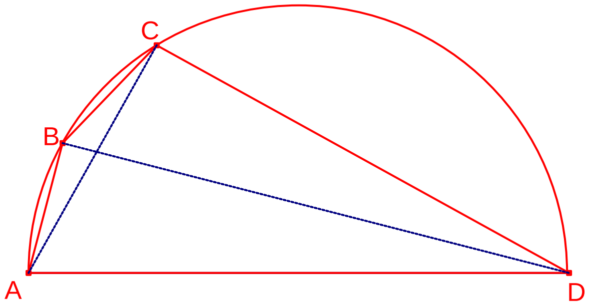
Solució 2:
Si els rectangles JEFH FCGH tenen la mateixa àrea, aleshores,
$\overline{CF} = \overline{FE}$.
La recta HF talla el costat $\overline{AD}$ en el punt P.
L'àrea del rectangle PHGD és la meitat de l'àrea del rectangle KJGD.
Aleshores, l'àrea del rectangle PHGD és la meitat de l'àrea del rectangle HFCG.
Aleshores, $x = \overline{HF} = 2\overline{PH}$.
Aleshores, $x = \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{2}{3}$.



285.- El diàmetre $\overline{AD}$ de la semicircumferència mesura 4. Siguen els punts B i C de la semicircumferència tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{CD}$.
Olimpíada Anglesa 2010. Prova McLaurin. Problema 4.



Solució:



Siga $x = \overline{CD}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és rectangle ja que C és inscrit en una circumferència i abraça un diàmetre.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AC} = \sqrt{16 - x^2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ADB}$ és rectangle ja que B és inscrit en una circumferència i abraça un diàmetre.

$\overline{BD} = \sqrt{15}$.

El quadrilàter ABCD és inscriptible en una circumferència.
Aplicant el teorema de Tolomeu:

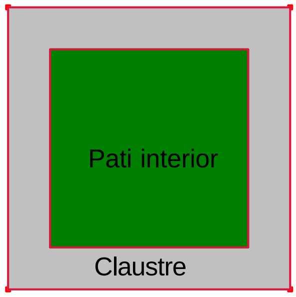
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.

$x + 4 = \sqrt{167 - x^2}\sqrt{15}$.

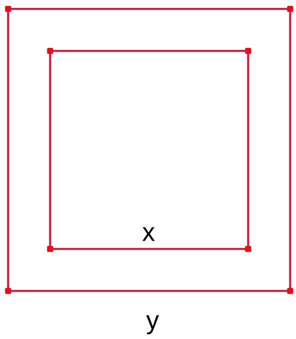
Resolent l'equació:

$x = \frac{7}{2}$.

286.- En la majoria dels monestirs, existeix un patí interior quadrat descobert.
En aquest pati els monjos es reunien quan feia bon temps.
A l'hivern quan plovia els monjos ocupaven el claustre cobert, fent una volta entorn del pati interior.
Quant ha de mesurar la part coberta a fi que capien el mateix nombre de persones que en el pati interior si el costat del pati interior mesura 20m.
Generalitzeu el problema per a un valor qualsevol del costat del pati interior



Solució:
Siga x el costat del pati interior.
Siga y el costat del claustre.
L'àrea del claustre és igual a la diferència entre el quadrat de costat y i el de costat x.



$$y^2 - x^2 = x^2$$

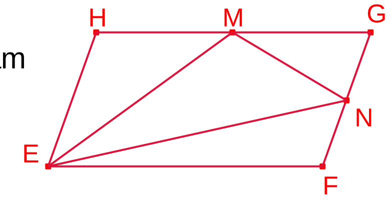
$$y = x\sqrt{2}\,.$$

És a dir, el costat del claustre mesura igual que la diagonal del pati.

287.- Donat el paral·lelogram EFGH, siguen M el punt mig del costat $\overline{GH}$ i N el punt mig del costat $\overline{FG}$.

Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EMN}$ és 12, calculeu l'àrea del paral·lelogram EFGH.

Solució:
Siga S l'àrea del paral·lelogram EFGH.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFN}$ és la quarta part de l'àrea del paral·lelogram EFGH ja que tenen la mateixa base $\overline{EF}$ i l'altura del triangle és la meitat de l'altura del paral·lelogram sobre el costat $\overline{EF}$.

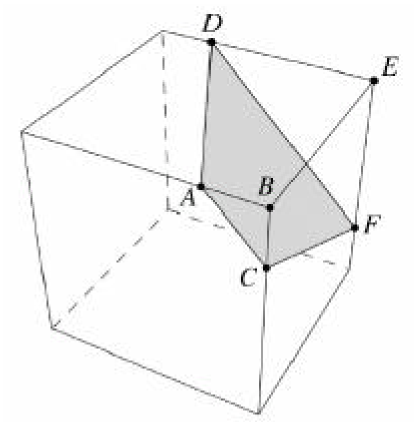
Anàlogament l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EHM}$ és la quarta part de l'àrea del paral·lelogram EFGH.

Anàlogament l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{GMN}$ és la vuitena part de l'àrea del paral·lelogram EFGH.

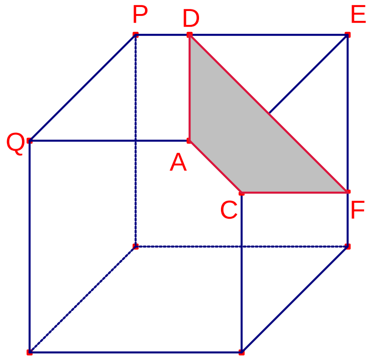
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{EMN}$ és $\frac{3}{8}$ de l'àrea del paral·lelogram EFGH.

$\frac{3}{8}S = 12$.
Aleshores, $S = 32$.

288.- Les arestes del cub mesuren 8 cm.
$\overline{AB} = \overline{BC} = 2\text{cm}$, $\overline{DE} = \overline{EF} = 6\text{cm}$.
Calculeu l'àrea del trapezi ACFD.



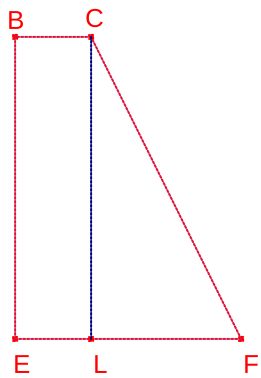
Solució:



ACFD és un trapezi ja que AC és paral·lel a DF.

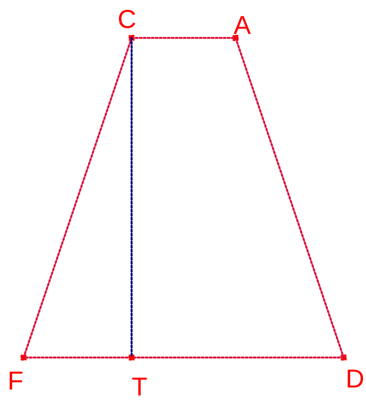
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 2\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEF}$:
$\overline{DF} = 6\sqrt{2}$.



Notem que els trapezis rectangles BCFE, PDAQ són iguals.
Aleshores, $\overline{CF} = \overline{AD}$.
Per tant, el trapezi ACFD és isòsceles.
Considerem el trapezi rectangle BCFE.
Siga L la projecció de C sobre $\overline{EF}$.
$\overline{LF} = 4$, $\overline{BE} = 8$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CLF}$:
$\overline{CF} = 4\sqrt{5}$.



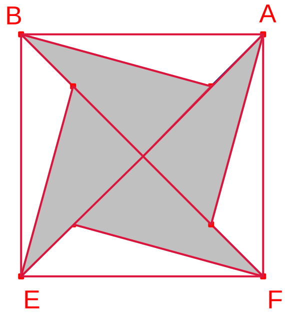
Considerem el trapezi ACFD.
Siga T la projecció de C sobre $\overline{FD}$.
$$\overline{FT} = \frac{\overline{DF} - \overline{AC}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FTC}$:
$$\overline{CT} = \sqrt{\overline{CF}^2 - \overline{FT}^2} = \sqrt{80 - 8} = 6\sqrt{2}.$$

L'àrea del trapezi ACFD és:
$$S_{ACFD} = \frac{\overline{DF} + \overline{AC}}{2}\overline{CF} = \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} 6\sqrt{2} = 48\text{cm}^2.$$

289.- La figura està formada per 4 rotacions successives de 90º amb centre D.

Si $\angle ABC = 15^{o}$ i l'àrea del quadrat ABEF és $24\,cm^2$, calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Si $\angle ABC = 15^{o}$, aleshores, $\angle CBD = 30^{o}$.

Per tant, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{CD}$

Siga $x = \overline{AB}$ costat del quadrat.

$S_{ABEF} = x^2 = 24$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$x^2 = 2 \cdot \overline{BD}$.

Aleshores, $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al traingle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$\left(2\overline{CD}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \overline{CD}^2$. Resolent l'equació:

$\overline{Cd} = 2$.

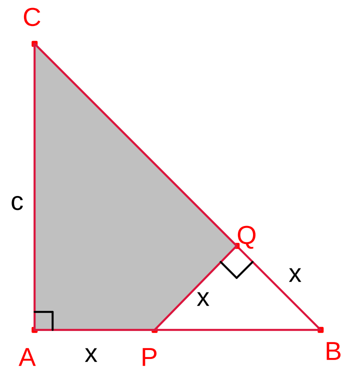
L'àrea ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$S_{ombrejada} = 4\left(\frac{\overline{BD} \cdot \overline{CD}}{2}\right) = 4\left(\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2}\right) = 8\sqrt{3}$$

290.- Donat un triangle rectangle i isòsceles dibuixem una recta perpendicular a la hipotenusa que divideix el triangle en un cometa i un triangle.
Determineu la raó entre les àrees del cometa i del triangle gran.
KöMal, febrer 2011. K284.

Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, rectangle $A=90^{o}$ i isòsceles, $\overline{AB}=\overline{AC}=c$.
Siga el segment $\overline{PQ}$ perpendicular a la hipotenusa tal que APQC és un cometa,
$\overline{AC}=\overline{CQ}$, $\overline{AP}=\overline{PQ}$.
Siga $\overline{AP}=\overline{PQ}=x$.



El triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQB}$ és isòsceles, $\overline{BQ}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQB}$:
$\overline{PB}=x\sqrt{2}$.
$\overline{AB}=x+x\sqrt{2}$, $\overline{AB}=c$. Aleshores:
$c=\left(1+\sqrt{2}\right)x$. Resolent l'equació en la incògnita x:
$x=\left(\sqrt{2}-1\right)c$
L'àrea del cometa APQC és el doble de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:
$S_{APQC}=xc=\left(\sqrt{2}-1\right)c^{2}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC}=\dfrac{c^{2}}{2}$.

La raó entre les àrees del cometa i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$\dfrac{S_{APQC}}{S_{ABC}}=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.