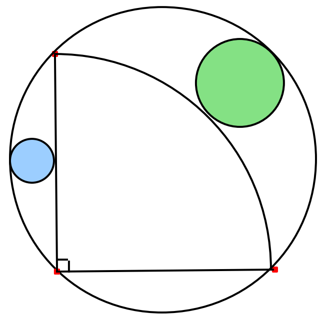
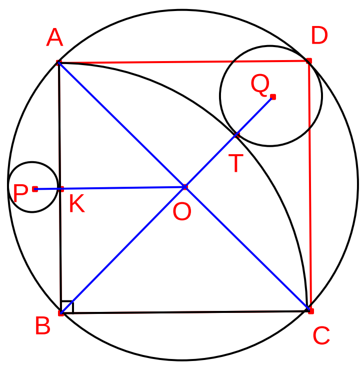
2891.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles ombrejats.



Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrant $\widehat{ATC}$ de centre B.
$\overline{BA} = R\sqrt{2}$



Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = r$

$$\overline{OP} = R - r = \frac{\sqrt{2}}{2}R + r$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R$$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$

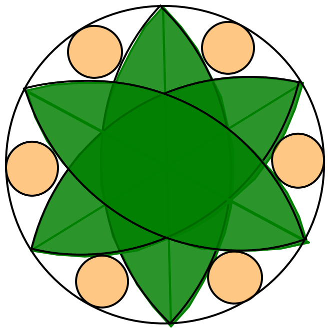
$$\overline{BQ} = 2R - s = \sqrt{2}R + s$$

$$s = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$$

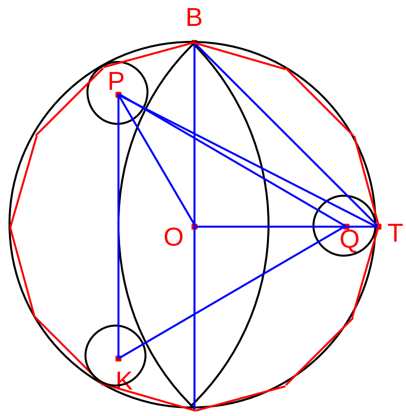
La proporció entre les àrees dels cercles és:

$$\left(\frac{s}{r}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}R}{\frac{2-\sqrt{2}}{4}R}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

2892.- En una circumferència, amb centre sobre la circumferència, s'han dibuixat 6 arcs iguals i 6 circumferències tangents a la circumferència i als arcs. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.

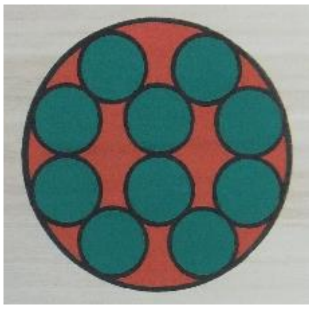
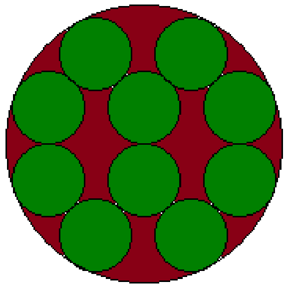


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga l'arc de centre T i passa per A, B
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = r$

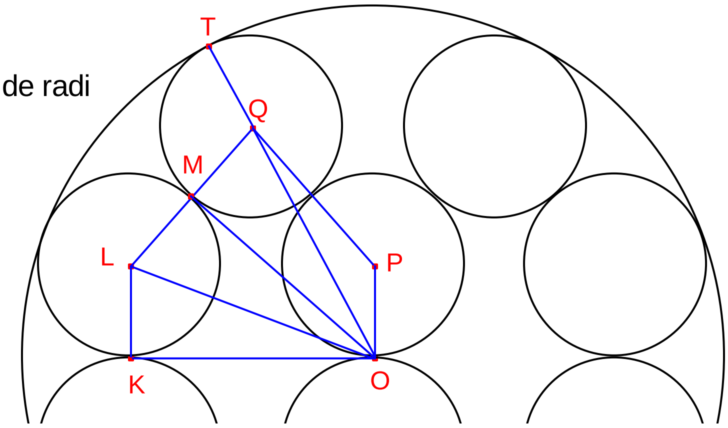


El radi dels arc és $\overline{TB} = R\sqrt{2}$
$\overline{TP} = R\sqrt{2} + r, \overline{OT} = R, \overline{OP} = R - r, \angle POT = 120°$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OPT}$:
$\left(R\sqrt{2} + r\right)^2 = R^2 + (R - r)^2 + R(R - r)$
Simplificant:
$R^2 + \left(-3 - 2\sqrt{2}\right)Rr = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{r}{R} = 3 - 2\sqrt{2}$

2893.- En una circumferència s’han inscrit deu circumferències iguals.
Determineu la proporció entre el radi de una menuda i el radi de la circumferència exterior.
Prefectura Shisouka.

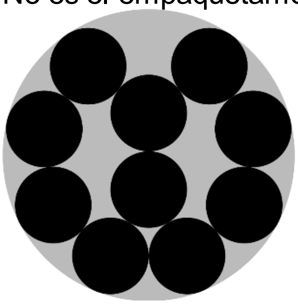



Solució:
Siga O el centre de la circumferència exterior de radi $R = \overline{OT}$.
Siga L el centre de la circumferència de radi $r = \overline{LK} = \overline{LM} = r$



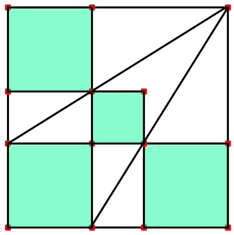
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKL}, \overset{\Delta}{OML}$ són iguals.
Siga $\angle KLO = \alpha$
$\overline{OL} = R - r$
$\cos\alpha = \dfrac{r}{R - r}$

$\angle OPQ = 2\alpha$
$\overline{OP} = r, \overline{PQ} = 2r, \overline{OQ} = R - r$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$
$(R - r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cdot \cos 2\alpha$
$(R - r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cdot (2 \cdot cos^2\alpha - 1)$
$(R - r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cdot \left(2\dfrac{r^2}{(R - r)^2} - 1\right)$
Simplificant:
$R^3 - 4rR^2 - 3r^2R + 14r^3 = 0$
Resolent l’equació:
$\dfrac{R}{r} = 2\sqrt{2} + 1 \approx 3.82$
No és el empaquetament òptim. L’empaquetament òptim és:

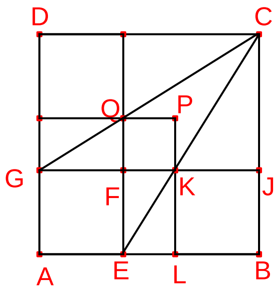


$\dfrac{R}{r} = 2\sqrt{2} + 1 \approx 3.81$

2894.- Calculeu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada formada per quatre quadrats (tres d'ells iguals) i l'àrea del quadrat exterior.
Prefectura de Gifu

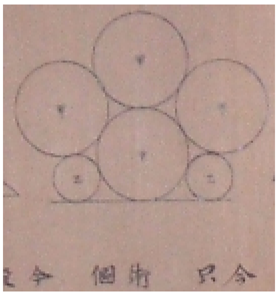


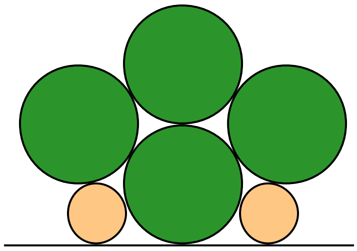
Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els quadrats $AEFG, BJKL$ de costat $\overline{AE} = \overline{LB} = x$
Siga el quadrat $FKPQ$ de costat $\overline{FK} = c - 2x$



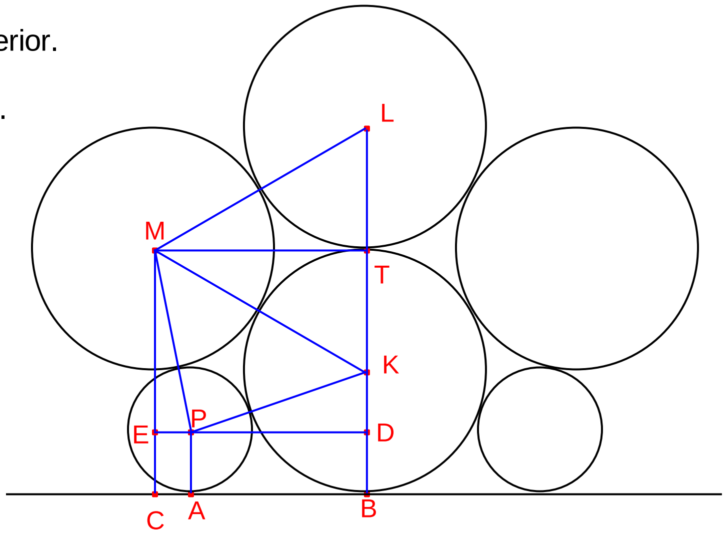
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EBC}, \overset{\Delta}{ELK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{c-x} = \frac{x}{c-2x}$$
Simplificant:
$$x^2 - 3cx + c^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}c$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{3 \cdot S_{AEFG} + S_{FKPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{3x^2 + (c-2x)^2}{c^2} = \frac{7x^2 - 4cx + c^2}{c^2} = 7 \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{2} - 2\left(3-\sqrt{5}\right) + 1 =$$
$$= \frac{39 - 17\sqrt{5}}{2} \approx 0.4934$$

2895.- La figura té si circumferències tangents tres a tres.
Hi ha quatre grans iguals i dus menudes iguals.
Les dues menudes i una de gran són tangents a una recta.
Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.
Prefectura de Nagano.





Solució:
Siguen K, L, M els centres de les tres circumferències iguals de radi $\overline{KT} = \overline{KB} = R$
Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PA} = r$
El triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és equilàter.
$\overline{MT} = R\sqrt{3}$
Siga C la projecció de M sobre la recta inferior.
Siga D la projecció de P sobre la recta KL.
Siga E la projecció de P sobre la recta MC.

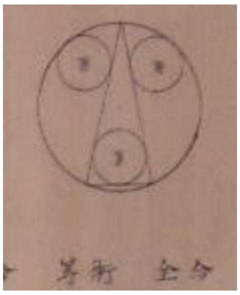


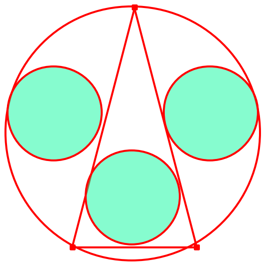
$\overline{PK} = R + r, \overline{DK} = R - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PDK}$:
$\overline{PD} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

$\overline{PE} = \overline{MT} - \overline{PD} = R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}$

$\overline{MP} = R + r, \overline{ME} = \overline{TB} - \overline{PA} = 2R - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPE}$:
$(R+r)^2 = (2R-r)^2 + \left(R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}\right)^2$
Simplificant:
$4\sqrt{3}\sqrt{Rr} = 6R - 2r$
Elevant al quadrat:
$r^2 - 18Rr + 9R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{r}{R} = 9 - 6\sqrt{2}$

2896.- En una circumferència s'ha inscrit un triangle isòsceles.
La circumferència inscrita al triangle i les circumferències tangents exteriors als costats iguals del triangle i tangents interiors a la circumferència són iguals.
Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferència.
Prefectura de Nagano

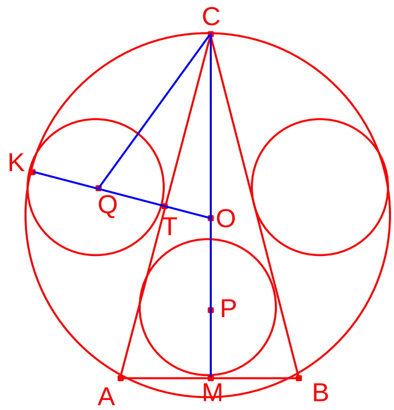




Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = a, \overline{BC} = \overline{AC} = b$ inscrit el la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$.

Siguen la circumferència de centre P inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi $\overline{PM} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = \overline{QK} = r$.

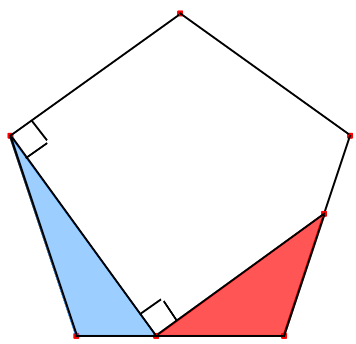


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$$\overline{CM} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} = \frac{ab^2}{4R} = \frac{1}{2}(a + 2b)r$$
Aleshores:
$$r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}, R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$
Siga $\angle ABC = \alpha$
$\angle KTC = \angle ABC = \alpha$

$$\overline{OT} = R - 2r, \overline{CT} = \frac{1}{2}b$$
Els triangles rectangles
$\overset{\Delta}{BMC}, \overset{\Delta}{QTC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{a} = \frac{b}{2(R - 2r)}$$
$$R - 2r = \frac{ab}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}$$
$$\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{a + 2b} = \frac{ab}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}$$
$$2b^2 - 2a(4b^2 - a^2) = ab$$
$$4b^3 - 8ab^2 - a^2b + 2a^3 = 0$$
Resolent l'equació:
$$\frac{b}{a} = 2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$$
Només és vàlida la primera solució.
La proporció entre els radis és:
$$\frac{r}{R} = \frac{a(4b^2 - a^2)}{2(a + 2b)b^2} = \frac{15a^3}{40a^3} = \frac{3}{8}$$

2897.- En la figura calculeu la proporció entre les àrees dels triangles blau i roig dibuixats dins d'un pentàgon regular.



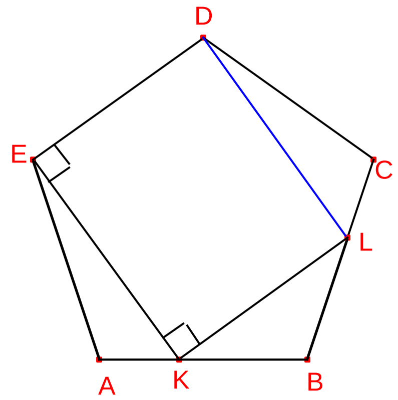
Solució:

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$.

$\overline{AC} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

L'angle interior del pentàgon és:

$\angle EAB = 108°$



Siguen els triangles $\overset{\Delta}{AKE}, \overset{\Delta}{KBL}$

Aleshores:

$\angle AEK = 108° - 90° = 18°$

$\angle AKE = 180° - (18° + 108°) = 54°$

$\angle LKB = 180° - (90° + 54°) = 36°$

$\angle BLK = 180° - (108° + 36°) = 36°$

Aleshores, $\overline{KB} = \overline{BL}$

Per tant, $\overline{AK} = \overline{CL}$

Els triangles $\overset{\Delta}{EAK}, \overset{\Delta}{DCL}$ són iguals (CAC)

Aleshores, $KLDE$ és un rectangle.

Per tant, $\overline{KL} = \overline{DE} = 1$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{\overline{KB}} = \dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1, \overline{AK} = 1 - (\Phi - 1) = 2 - \Phi$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKE}$ és:

$S_{AKE} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - \Phi) \sin 108° = \dfrac{2-\Phi}{2} \sin 108°$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KBL}$ és:

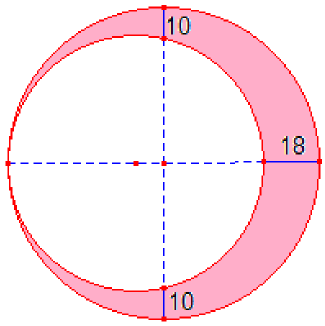
$S_{KBL} = \dfrac{1}{2} \cdot (\Phi - 1)^2 \sin 108° = \dfrac{2-\Phi}{2} \sin 108°$

La proporció entre les àrees és:

$\dfrac{S_{AKE}}{S_{KBL}} = 1$

Els dos triangles tenen la mateixa àrea.

2898.- Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



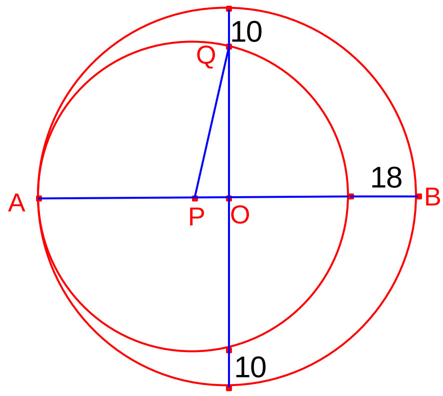
Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior.

Siga P el centre de la circumferència tangent interior a l'anterior de radi $r = \overline{PA}$ on A és el punt de tangència.

El radi de la circumferència exterior és $\overline{OB} = r + 9$.

$\overline{OP} = 9, \overline{PQ} = r, \overline{OQ} = r - 1$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POQ}$

$r^2 = 9^2 + (r-1)^2$

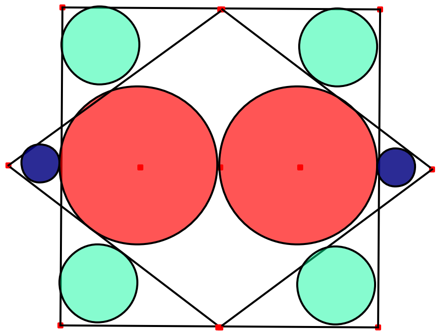
Resolent l'equació:

$r = 41$

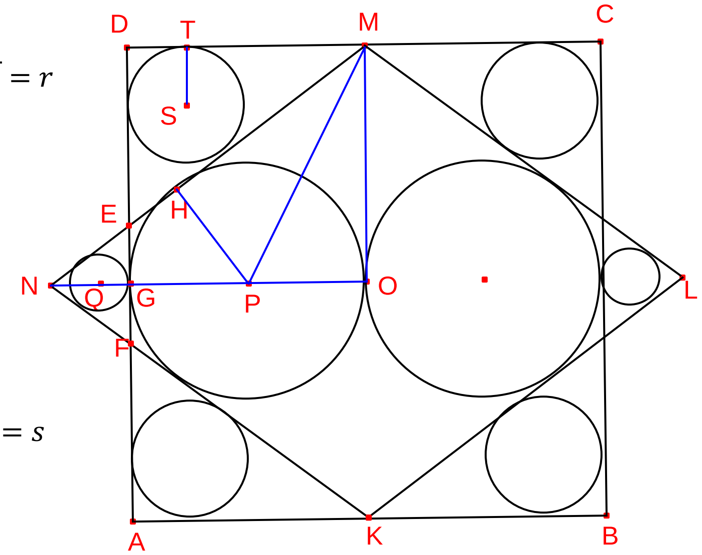
L'àrea de la regió ombrejada és:

$S = \pi 50^2 - \pi 41^2 = 819\pi$

2899.- En un quadrat s'han dibuixat dues circumferències tangents iguals.
Un rombe té els costats tangents a les dues circumferència.
S'han dibuixat sis circumferències inscrites als triangles que formen la intersecció del quadrat i del rombe.
Calculeu la proporció entre els radis dels tres tipus de circumferències.
Prefectura Yamagata



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4r$ de centre O.
Siga el rombe $KLMN$ tangent a les circumferències de radi r.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = r$
Siga $\alpha = \angle PMO$. $\angle NMO = \angle DEM = 2\alpha$



$$\tan\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{DE} = \frac{3}{2}r, \overline{EM} = \frac{5}{2}r$$

Siga la circumferència de centre S i radi $\overline{ST} = s$ inscrita al triangle $\overset{\Delta}{DEM}$.

$$s = \frac{2r + \frac{3}{2}r - \frac{5}{2}r}{2} = \frac{1}{2}r$$

$$\overline{ON} = \frac{8}{3}r$$

$$\overline{NG} = \frac{2}{3}r, \overline{EF} = r, \overline{NE} = \frac{5}{6}r$$

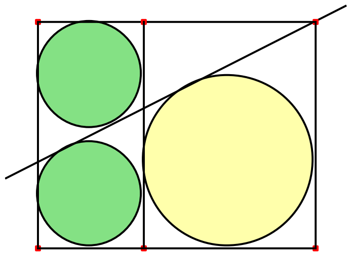
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QG} = t$ inscrita al triangle $\overset{\Delta}{NEF}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{NEF}$ és:

$$\frac{1}{2}r\cdot\frac{2}{3}r = \frac{2\cdot\frac{5}{6}r + r}{2}t$$

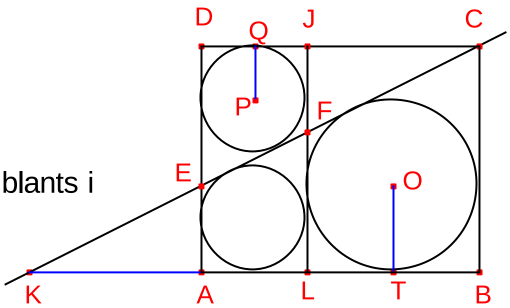
$$t = \frac{1}{4}r$$

Aleshores, la proporció dels radis és:
$r: s: t = 4: 2: 1$

2900.- En la figura les dues circumferències verdes tenen radi 1. Calculeu el radi de la circumferència groga.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ exterior a les tres circumferències.
Siga la circumferència groga de centre O i radi $\overline{OT} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = 1$
Siga el segment $\overline{JL}$ tangent a les tres circumferències.
Siga la recta EC tangent a les tres circumferències.
La recta CE talla la recta AB en el punt K.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{KLF}$ són iguals ja que són semblants i tenen la mateixa circumferència inscrita.

$\overline{AB} = \overline{CD} = 2 + 2r$
$\overline{KL} = \overline{AB}$
Aleshores:
$\overline{BK} = 2 + 4r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{KBC}$ són semblants i de raó 1:r (radis de les circumferències inscrites.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2 + 2r}{2 + 4r} = \frac{1}{r}$$
Simplificant:
$r^2 - r - 1 = 0.$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$