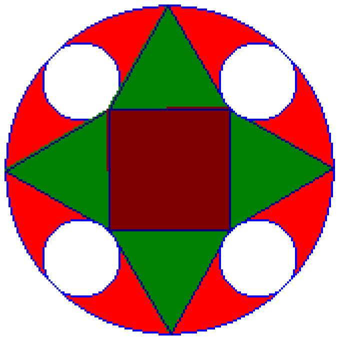
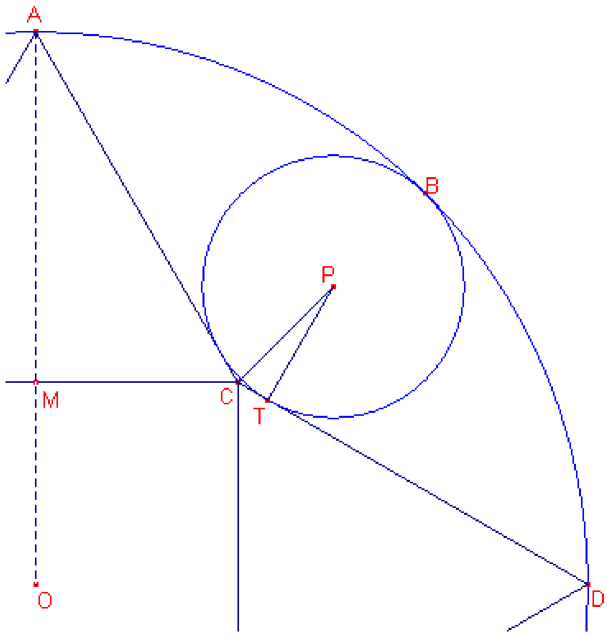
2901.- Dins d'una circumferència de radi R s'ha dibuixat 1 quadrat, 4 triangles equilàters sobre els costats del quadrat i 4 circumferències tangent a la circumferència exterior i tangent als costats del triangle.
Calculeu el radi d'aquestes 4 circumferències.
Prefectura Okayama.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència exterior de radi R.
Siga P el centre de la circumferència menuda (superior dreta).
Siga B el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga C el vèrtex (superior dreta) del quadrat.
Siga A el vèrtex, exterior al quadrat, del triangle equilàter.



$R = \overline{OA}$
Siga $r = \overline{PB} = \overline{PC}$ el seu radi.
Siga T el punt de la circumferència de radi r i el costat del triangle $\overline{CD}$.
Siga c el costat del quadrat.
Siga M el punt mig del costat superior del quadrat.

$$\overline{OM} = \frac{c}{2}, \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{AM} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$R = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

Resolent l'equació en la incògnita c:

$$c = \left(\sqrt{3}-1\right)R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$:

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$$

Notem que $\angle ACD = 150°, \angle CAD = 15°$.
Aleshores, $\angle CPT = 15°$.

$$\overline{PC} = \overline{CB} - \overline{OC} - \overline{PB}$$

$$\overline{PC} = R - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R - r$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPT}$.

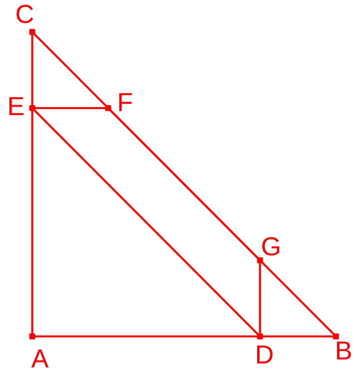
$$\frac{r}{R - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R - r} = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{-2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}R$$

2992.- Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{BC}$.
Siguen els punts D del catet $\overline{AB}$, i E del catet $\overline{AC}$ tals que:
$\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AB}, \overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AC}$
La paral·lela a $\overline{AC}$ que passa per D talla $\overline{BC}$ en G, i la paral·lela a $\overline{AB}$ que passa per E talla $\overline{BC}$ en F.
Si l'àrea del trapezi $DEFG$ és igual a 10, calculeu la longitud dels catets del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

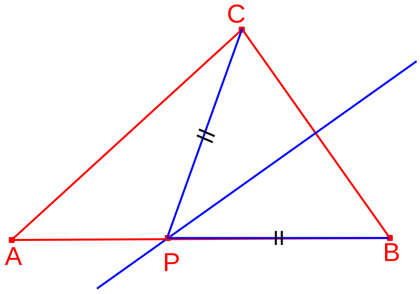
Solució:
Siga $\overline{CE} = \overline{BD} = x, \overline{AE} = \overline{AD} = 3x$
$S_{DEFG} = S_{ABC} - (S_{ADE} + 2 \cdot S_{GDB}) = \frac{1}{2}(4x)^2 - \left(\frac{1}{2}(3x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{5}{2}x^2$
$\frac{5}{2}x^2 = 10$
Resolent l'equació:
$x = 2$
El catet del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$\overline{AB} = 4x = 8$



2903.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ determinem el punt P sobre el costat $\overline{AB}$ de forma que $\overline{PC} = \overline{PB}, \angle APC = 110°, \angle ACP = 28°$

Calculeu la mesura dels angles interiors del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
$A = 180° - (\angle APC + \angle ACP) = 180° - (110° + 28°) = 42°$

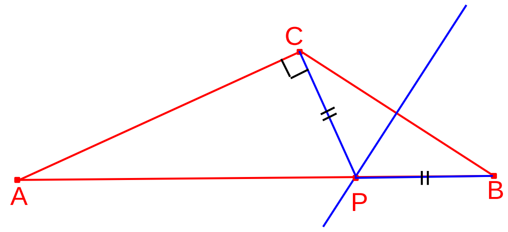


Els triangles $\overset{\Delta}{PBC}$ és isòsceles.
Siga $\angle PCB = \angle PBC = \alpha$
$2\alpha = \angle APC = 110°$
Aleshores:
$\alpha = B = 55°$
$C = 28° + \alpha = 83°$

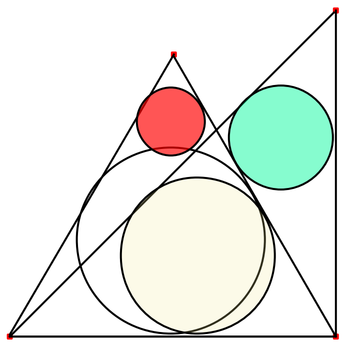
2904.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ determinem el punt P sobre el costat $\overline{AB}$ de forma que $\overline{AC}$ és perpendicular a $\overline{CP}$ i $\overline{PC} = \overline{PB}$

Si $A = 24°$ calculeu la mesura dels angles interiors del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
$\angle APC = 90° - 24° = 66°$
Els triangles $\overset{\Delta}{PBC}$ és isòsceles.
Siga $\angle PCB = \angle PBC = \alpha$
$2\alpha = \angle APC = 66°$
Aleshores:
$\alpha = B = 33°$
$C = 90° + \alpha = 123°$



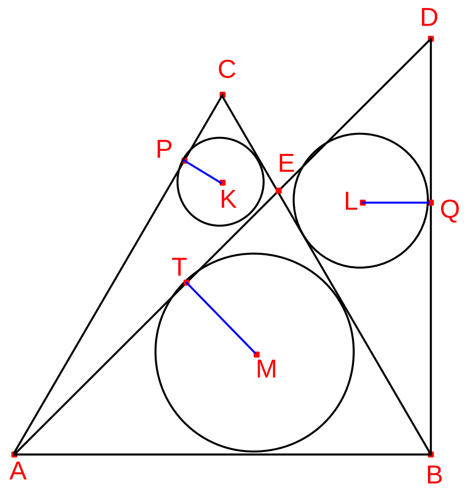
2905.- En la figura el costat del triangle equilàter és 1 i un triangle rectangle isòsceles.
Calculeu el radi de les tres circumferències ombrejades.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}, B = 90°, \overline{BD} = \overline{AB} = 1$
Siga E la intersecció dels dos triangles.
Siguen $\overline{CE} = x, \overline{AE} = y$
$\angle CAE = 15°$



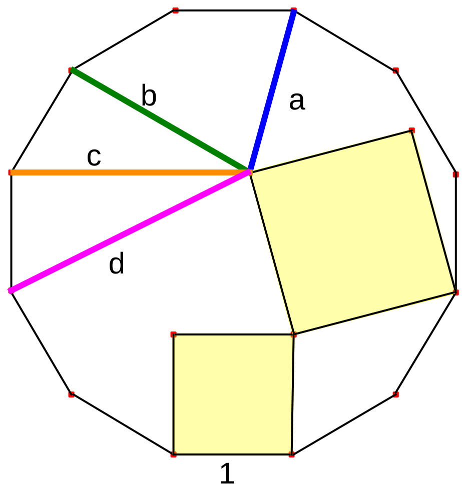
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACE}$:
$$\frac{x}{\sin 15°} = \frac{1}{\sin 75°} = \frac{y}{\sin 60°}$$
$$x = 2 - \sqrt{3}$$
$$y = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$
Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KP} = r$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} r(1 + x + y)$$
$$2\sqrt{3} - 3 = \left(6 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) r$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4}$$
$$\overline{BE} = 1 - x = -1 + \sqrt{3}, \overline{AD} = \sqrt{2}, \overline{DE} = \sqrt{2} - y = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$
Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LQ} = s$
$\angle EBD = 30°$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-1 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} s \left(1 - 1 + \sqrt{3} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$$
Resolent l'equació:
$$s = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 6}{4}$$
Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MT} = t$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-1 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} t \left(1 - 1 + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)$$
Resolent l'equació:
$$t = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2}{4}$$

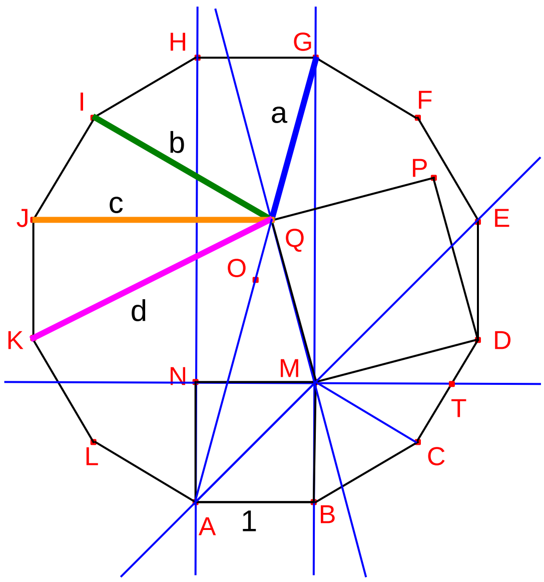
2906.- Donat un dodecàgon regular de costat 1 s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu les mesures dels segments a, b, c, d



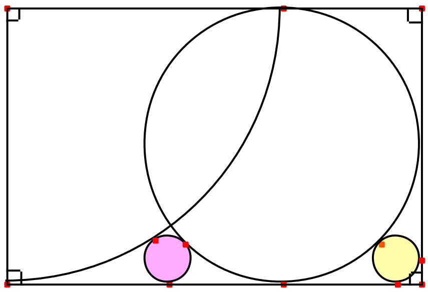
Solució:
Siga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siguen els quadrats $ABMN, MDPQ$.
$\angle MBC = \angle ABC - 90° = 60°, \overline{BM} = \overline{BC} = 1$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCM}$ és equilàter.
$\overline{CM} = 1, \angle MCD = \angle BCD - 60° = 90°$
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{MCD}$ és rectangle i isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{DM} = \sqrt{2}$
A, N, H estan alineats.
B, M, G estan alineats.
$\angle NAM = \angle HAE = 45°$
Aleshores, A, M, E estan alineats.
$\angle AGB = 15°$
$\angle BMD = 60° + 45° = 105°$
La recta NM talla el costat $\overline{CD}$ en el punt T.
$\angle DMT = \angle BDM - 90° = 15°$
$\angle QMG = \angle DMT = 15°$
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{MQG}$ és isòsceles:
$a = \overline{QG} = \overline{MQ} = \sqrt{2}$
$\angle NDC = LDC = 45°$
Aleshores, L, M, D estan alineats.
$\angle LDC = LDI = 45°$
Aleshores, D, Q, I estan alineats.
$\angle JID = 90°$
$\angle IGA = 60°, \angle IQG = 75°$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{IQG}$

$$\frac{b}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}$$

$b = \sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{JIQ}$:
$c = \overline{QJ} = 2, \angle IJQ = 60°$
$\angle IJE = 60°$
Aleshores, J, Q, E estan alineats.
$\angle KJQ = 90°$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{KJQ}$:
$d = \overline{KQ} = \sqrt{5}$

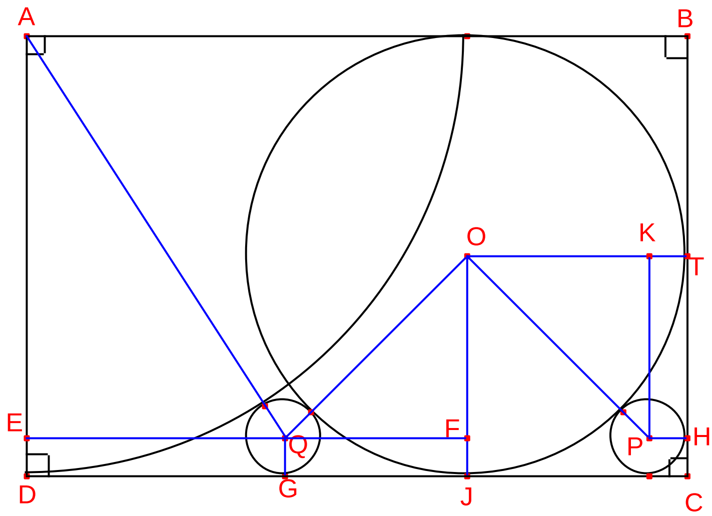


2907.- En un rectangle s'han dibuixat tres circumferència i un quadrant.
Calculeu la proporció entre les àrees dels cercles ombrejats.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OJ} = r$
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 3r, \overline{AD} = 2r$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PH} = s$
Siga K la projecció de P sobre $\overline{DT}$
$\overline{OP} = r + s, \overline{OK} = \overline{PK} = r - s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPK}$
$r + s = (r - s)\sqrt{2}$
Resolent l'equació:
$s = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)r$

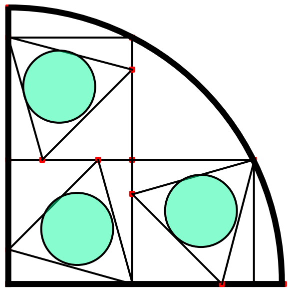


Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QG} = t$
Siga F la projecció de Q sobre $\overline{OJ}$
Siga E la projecció de Q sobre $\overline{AD}$
Siga $a = \overline{DG}, \overline{JG} = 2r - a$
$\overline{AQ} = 2r + t, \overline{AE} = 2r - t$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEQ}$:
$4r^2 + t^2 + 4rt = 4r^2 + t^2 - 4rt + a^2$
Simplificant:
$a^2 = 8rt$
$\overline{OQ} = r + t, \overline{OE} = r - t$

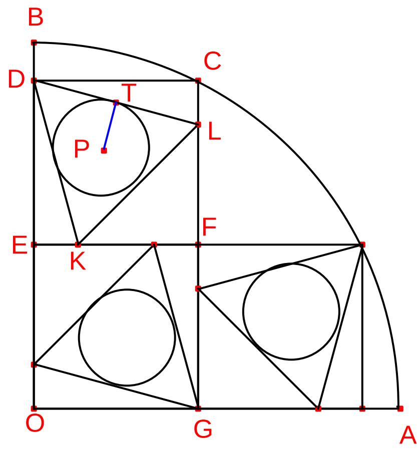
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QEO}$:
$r^2 + t^2 + 2rt = r^2 + t^2 - 2rt + 4r^2 + a^2 - 4ra$
Simplificant:
$4rt = 4r^2 + a^2 - 4ra$
$4rt = 4r^2 + 8rt - 4ra$
$a = r + t$

$(r + t)^2 = 8rt$
$t^2 - 6rt + r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$t = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)r$
Les dues circumferències ombrejades són iguals.
La proporció de les àrees és 1.

2908.- En un quadrant s'han inscrit 3 quadrats iguals.
En cada quadrat s'ha inscrit un triangle equilàter.
En cada triangle equilàter s'ha inscrit el cercle inscrit.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels tres cercles i l'àrea del quadrant.



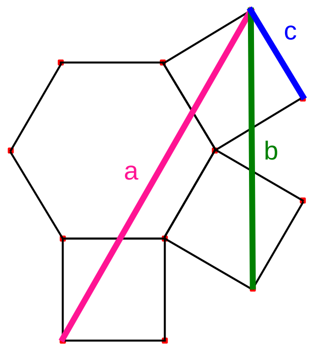
Solució:
Siga el quadrat de centre O i radi $\overline{OA} = r$
Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = c$



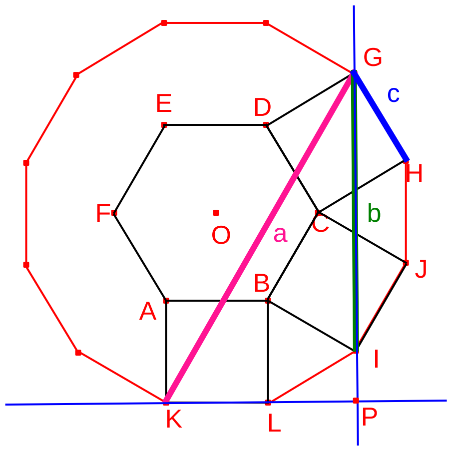
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODC}$:
$r^2 = 5c^2$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DKL}$ de costat $\overline{DK} = d, \angle EDK = 15°$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEK}$:
$$\frac{c}{d} = \cos 15° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$d = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{5}r$$
Siga la circumferència de centre P i radi $s = \overline{PT}$
$$s = \frac{\sqrt{3}}{6}d = \frac{3\sqrt{10}-\sqrt{30}}{30}r$$
La proporció entre la suma de les àrees dels tres cercles i l'àrea del quadrant és:
$$\frac{3 \cdot \pi \left(\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{30}}{30}r\right)^2}{\frac{1}{4}\pi r^2} = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{5} \approx 0.2144$$

2909.- Sobre l'exterior de tres costats consecutius d'un hexàgon regular s'han dibuixat tres quadrats. Determineu la relació entre els segments a, b, c.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siguen els quadrat $CDGH, ABLK, BCHI$.
El dodecàgon regular de centre O que passa pel vèrtexs G passa pels vèrtexs G, H, I, L, K del quadrat.
$\angle KGI = 30°, \angle GKL = 60°$



Siga P la intersecció de les rectes KL, GI
El triangle $\overset{\Delta}{GKP}$ és rectangle.

$\overline{KP} = \frac{1}{2}\overline{AG}$

$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c = \frac{1}{2}a$

$c = (2 - \sqrt{3})a$

$\overline{GP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AG}$

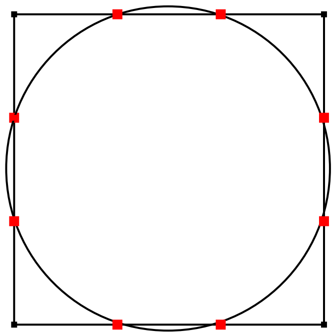
$b + \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$b = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}a$

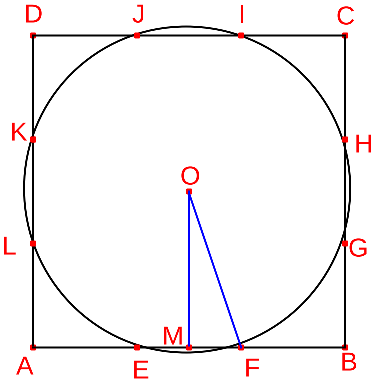
$b = (-1 + \sqrt{3})a$

Notem que $b + c = a$

2910.- El quadrat de la figura de costat 6.
Cada costat de la figura s'ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu el radi de la circumferència que passa pels vuit punts en què queden dividís els costats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$ de centre O.
El punt O és centre de la circumferència que passa pels punts E, F, G, H, I, J, K, L, que divideixen els costats en tres parts iguals.
Siga $\overline{OF} = R$ radi de la circumferència.



$\overline{EF} = 2$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{OM} = 3, \overline{MF} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMF}$:
$R^2 = 3^2 + 1^2$
$R = \sqrt{10}$