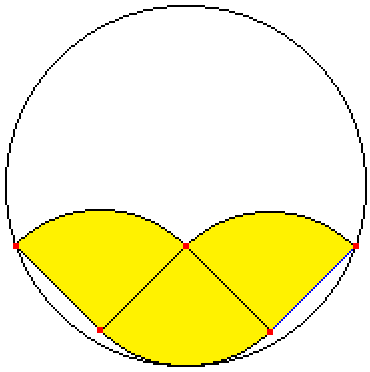
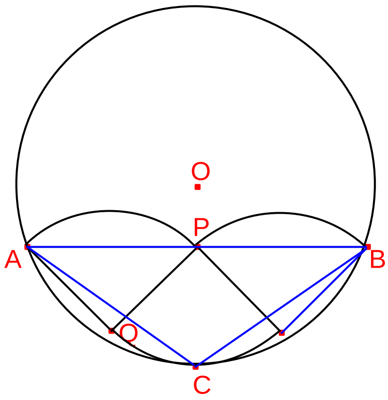
2911.- Els tres quadrants interiors a la circumferència són iguals.
Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de la circumferència exterior.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OC} = R$



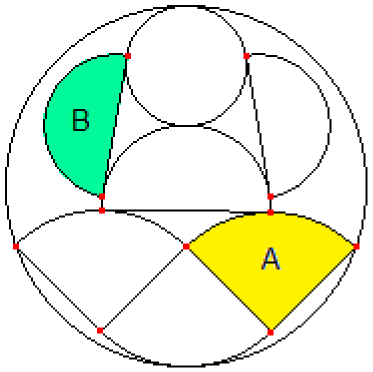
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OQ} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQP}$:
$\overline{AP} = c\sqrt{2}, \overline{AB} = 2c\sqrt{2}$

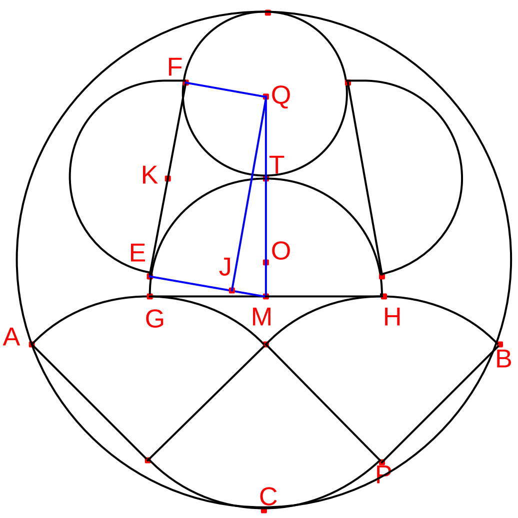
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:
$\overline{AC} = \overline{BC} = c\sqrt{3}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}$ és:
$$S_{ACB} = \frac{1}{2}2c\sqrt{2} \cdot c = \frac{1c\sqrt{2} \cdot c\sqrt{3} \cdot c\sqrt{3}}{4R}$$
Resolent l'equació:
$$R = \frac{3}{2}c$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{3}{4}\pi c^2}{\pi\left(\frac{3}{2}c\right)^2} = \frac{1}{3}$$

2912.- Els tres quadrants interiors a la circumferència són iguals.
El diàmetre de la semicircumferència gran és tangent a dos quadrats.
La circumferència menuda és tangent a la circumferència exterior i a la semicircumferència gran.
Els diàmetres de dues semicircumferències iguals són tangents a la circumferència menuda i a la semicircumferència gran.
Determineu la proporció entre les àrees A, B.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OC} = R$
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OQ} = c$



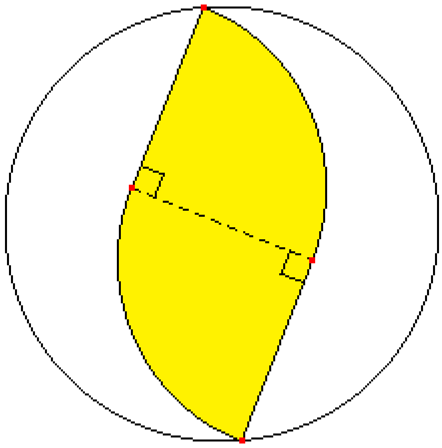
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPB}$:
$\overline{BP} = c\sqrt{2}, \overline{AB} = 2c\sqrt{2}, \overline{GH} = c\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDB}$:
$\overline{AC} = \overline{BC} = c\sqrt{3}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}$ és:
$$S_{ACB} = \frac{1}{2}2c\sqrt{2}\cdot c = \frac{1c\sqrt{2}\cdot c\sqrt{3}\cdot c\sqrt{3}}{4R}$$
Resolent l'equació:
$$R = \frac{3}{2}c$$
El radi de la semicircumferència gran és:
$$\overline{MG} = \overline{MT} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$
$$\overline{CM} = c + c - \frac{\sqrt{2}}{2}c = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c$$

Siga Q el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{QT}$.
$$\overline{QT} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}c - \frac{\sqrt{2}}{2}c - \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c}{2} = \frac{1}{2}c$$
Siga K el centre de la semicircumferència menuda de diàmetre $\overline{EF}$.
Siga J la projecció de Q sobre $\overline{EM}$.
$$\overline{QM} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}c, \overline{JM} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QJM}$:
$$\overline{EF} = c\sqrt{\sqrt{2}}$$
El radi de la semicircumferència és:
$$\overline{KE} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}c$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}$$

2913.- En una circumferència s’han dibuixat dos quadrats iguals.
Calculeu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada i el cercle exterior.



Solució:
Siga el quadrat de centre F i radi $\overline{FE} = r$
Els dos quadrants estan inscrits en el rectangle $ABCD$.
La circumferència està circumscrita al rectangle $ABCD$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, el diàmetre de la circumferència exterior és:

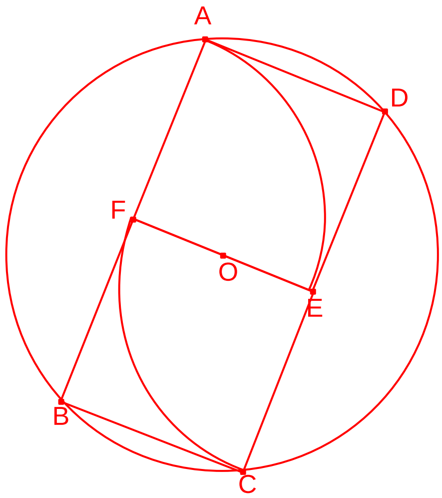
$\overline{AC} = r\sqrt{5}$

El radi de la circumferència exterior és:

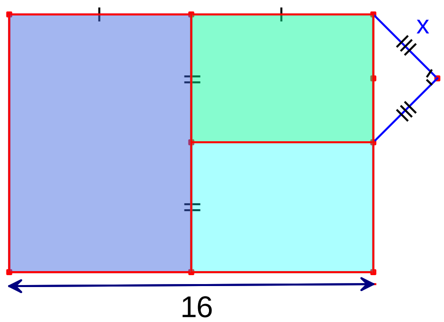
$\overline{OA} = \frac{\sqrt{5}}{2}r$

La proporció entre les àrees és:

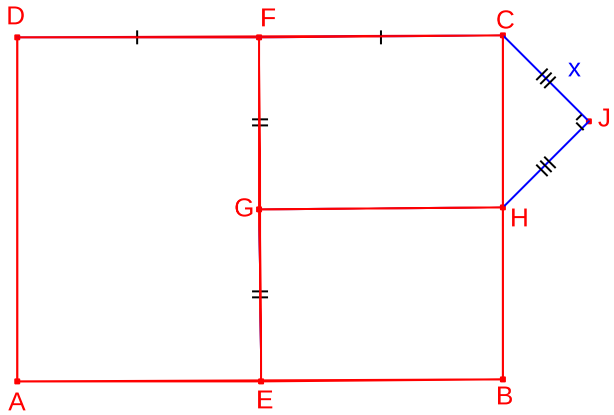
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}r\right)^2} = \frac{2}{5}$$



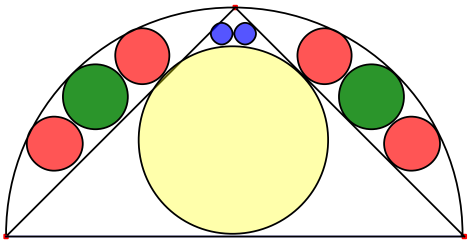
2914.- Tots els rectangles de la figura són semblants.
Calculeu la mesura del segment x.



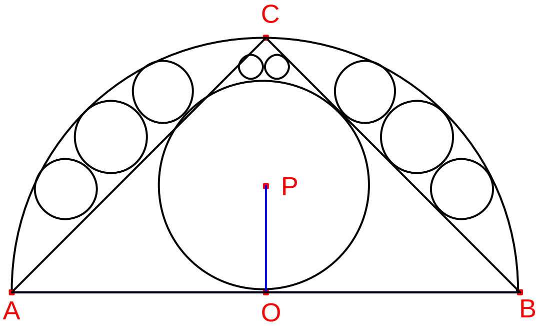
Solució:
Siga el rectangle $ABCD, \overline{AB} = 16, \overline{Ad} = a$
$\overline{DF} = 8$
Els rectangles $ABCD, ADFE$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{16}{a} = \frac{a}{8}$
Resolent l'equació:
$a = 8\sqrt{2}$
$\overline{CH} = 4\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{CHJ}$
$x = \overline{CJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{CH} = 4$



2915.- Sobre el diàmetre d'una semicircumferència com diàmetre, s'ha dibuixar un triangle rectangle isòsceles.
S'ha dibuixat la circumferència inscrita al triangle.
S'ha dibuixat dues circumferències tangents iguals (blaves) i tangents a la circumferència inscrita i a un costat (cadascuna)
Al exterior del triangle sobre cada catet del triangle s'han dibuixat tres circumferències tangents i tangents al catet i a la semicircumferència.
Si el radi de la semicircumferència és R, calculeu el radi de totes les circumferències.
Prefectura de Gifu



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$

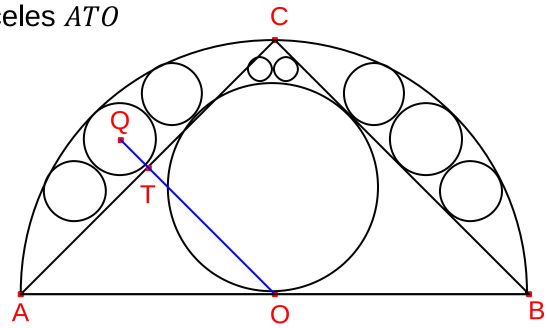


Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle:
$\overline{AC} = \overline{BC} = R\sqrt{2}$
Siga la circumferència inscrita al triangle de centre P i radi $\overline{PO} = r$
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:

$$r = \frac{2 \cdot \overline{AC} - \overline{AB}}{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R$$

Siga la circumferència (verda) de centre Q i radi $\overline{QT} = s$
$\overline{OQ} = R - s, \overline{AT} = \overline{OT}, \overline{AT} \perp \overline{OT}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ATO}$



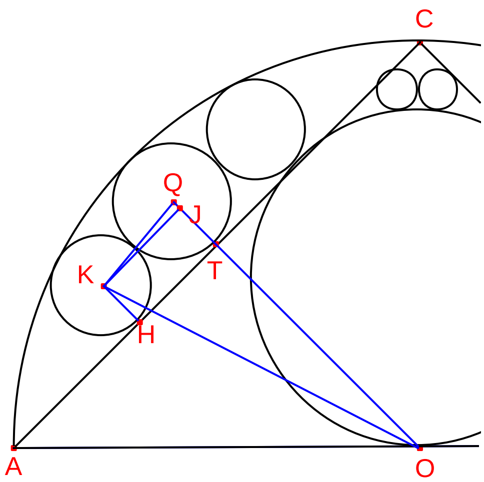
$$\overline{OT} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$s = \overline{OQ} - \overline{OT} = R - s - \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}R$$

Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KH} = t$
Siga J la projecció de K sobre $\overline{OQ}$
$\overline{OK} = R - t, \overline{KQ} = s + t, \overline{QJ} = s - t$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KJQ}$:

$$\overline{KJ} = \sqrt{(s+t)^2 - (s-t)^2} = 2\sqrt{st}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KOJ}$:

$$\overline{OJ} = \sqrt{(R-t)^2 - 4st} = \sqrt{R^2 + t^2 + \left(-4 + \sqrt{2}\right)Rt}$$

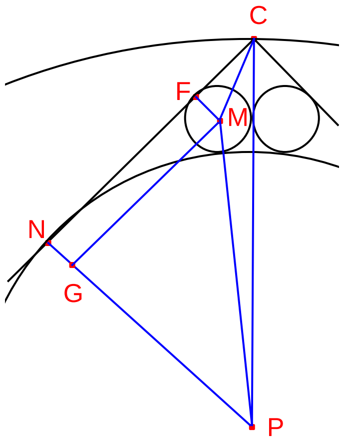
$$\overline{OQ} = \overline{QJ} + \overline{OJ}$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{4}R = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}R - t + \sqrt{R^2 + t^2 + \left(-4 + \sqrt{2}\right)Rt}$$

Resolent l'equació en la incògnita t:

$$t = \frac{1}{8}R$$

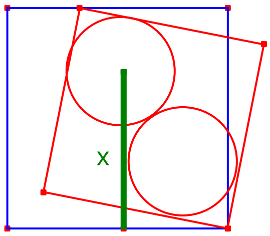
Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MF} = m$
Siga N el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el catet $\overline{AC}$.
$\overline{PN} = \overline{CN} = r$
Siga G la projecció de M sobre $\overline{PN}$



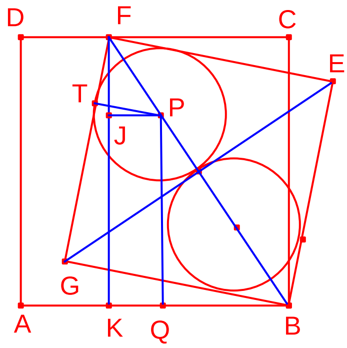
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PGM}$
$\overline{NF} = \overline{GM} = 2\sqrt{mr}$
$\overline{CF} = r - 2\sqrt{mr}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CFM}$:
$$\frac{m}{r - 2\sqrt{rm}} = \tan\frac{45°}{2} = \sqrt{2} - 1$$
Resolent l'equació:
$$m = \left(2\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} - 11 + 8\sqrt{2}\right)R \approx 0.05107611177 \cdot R$$

2916.- El quadrat blau té àrea 2.
El quadrat roig té dues circumferències inscrites iguals.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 2 i costat $\overline{AB} = \sqrt{2}$
Siga el quadrat $BEFG$ de diagonal $\overline{BF} = d$

$$\overline{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} d$$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$

La circumferència de centre P està inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GFE}$

$$\overline{PT} = r = \frac{2 \cdot \overline{BE} - \overline{GE}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} d$$

$$\overline{FP} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} d$$

Siga K la projecció de F sobre la base $\overline{AB}$
Siga J la projecció de P sobre $\overline{FK}$

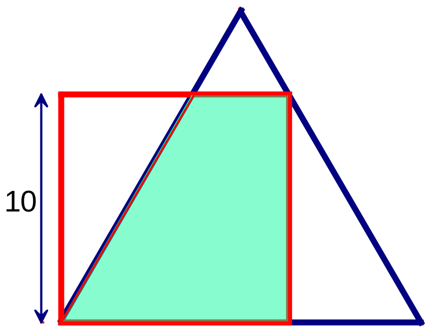
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FJP}, \overset{\Delta}{FKB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FJ}}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{BF}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{FJ} = \sqrt{2} - 1$$

$$x = \overline{PQ} = \overline{FK} - \overline{FJ} = 1$$

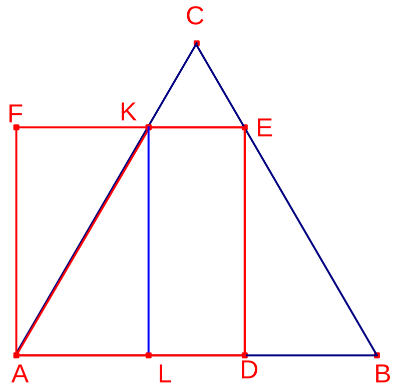
2917.- Determineu l'àrea de la intersecció del triangle equilàter i el quadrat de costat 10 de la figura.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el quadrat $ADEF$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga K el punt intersecció del triangle i del quadrat.
Siga $x = \overline{FK}$
$\overline{KE} = \overline{CK} = 10 - x$
Siga L la projecció de K sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{AK} = 2 \cdot \overline{AL} = 2x$
$\overline{KL} = x\sqrt{3} = 10$
Resolent l'equació:

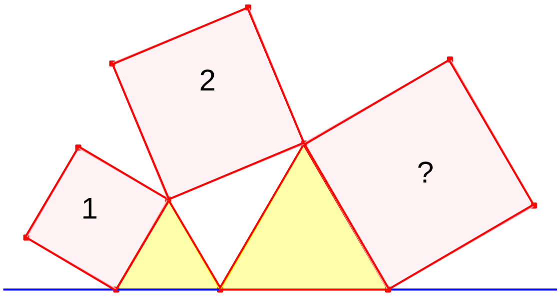
$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$



L'àrea del trapezi $ADEK$ intersecció del triangle equilàter i de quadrat és:

$$S_{ADEK} = \frac{10 + 10 - x}{2} \cdot 10 = 5(20 - x) = 50\left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right) \approx 71.1325$$

2918.- Sobre una recta és dibuixen dos triangles equilàters, amb un vèrtex comú.
El quadrat dibuixat sobre el costat de l'esquerra té àrea 1.
Calculeu l'àrea del quadrat dibuixat sobre el costat del triangle de la dreta si l'àrea del quadrat dibuixat sobre els dos vèrtex dels dos triangles, exteriors a la recta és 2.



Solució:

Siguen els triangles equilàters $J\overset{\Delta}{K}M, L\overset{\Delta}{P}L$

$\overline{KM} = 1, \overline{ML} = \sqrt{2}, \angle MKL = 60°$

Siga $\overline{KL} = \overline{LP} = a$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $K\overset{\Delta}{L}M$:

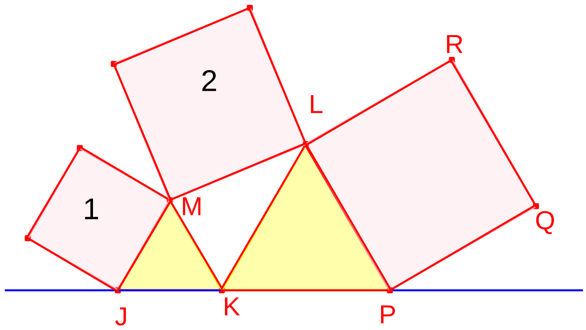
$2 = 1 + a^2 - 2 \cdot 1 \cdot a \cdot \frac{1}{2}$

$a^2 - a - 1 = 0$

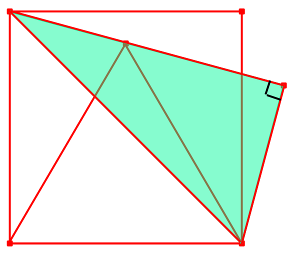
$a = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

L'àrea del quadrat LPQR és:

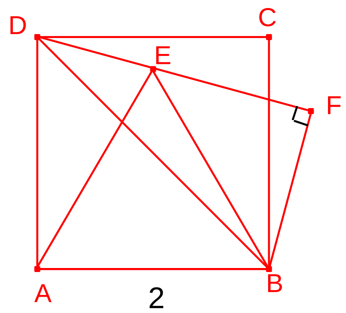
$S_{LPQR} = \ \Phi^2 = 1 + \Phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$



2919.- Sobre els costat d’un quadrat de costat 2 s’ha dibuixat un triangle equilàter.
La diagonal del quadrat és la hipotenusa d’un triangle rectangle un catet conté el vèrtex del triangle equilàter.
Calculeu l’àrea del triangle rectangle.



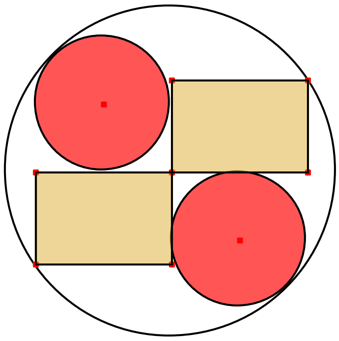
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$
$\angle DAE = 30°, \overline{AD} = \overline{AE}.$
Aleshores, $\angle EDA = 75°$

$\angle EDB = 75° - 45° = 30°$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = 2\sqrt{2}$
$\overline{BF} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BFD}$:
$\overline{DF} = \sqrt{6}$
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BFD}$ és:
$S_{BFD} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3}$

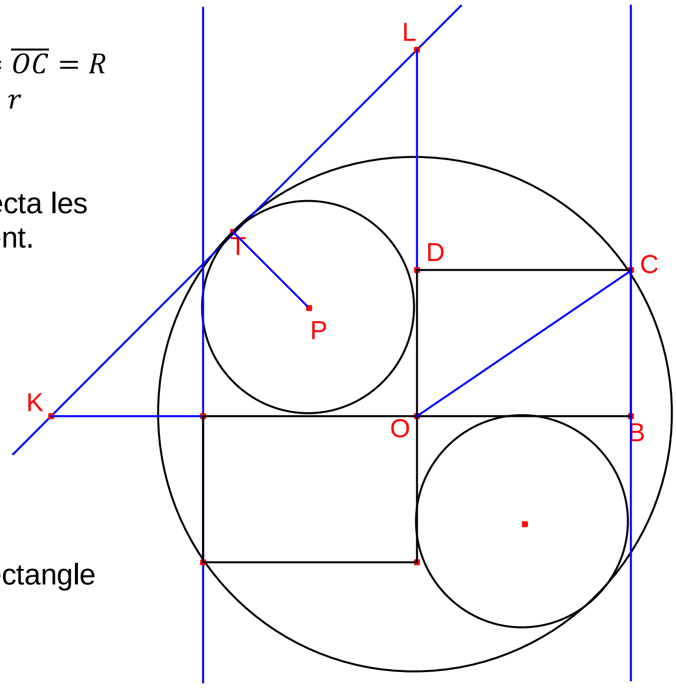
2920.- La circumferència exterior té radi R.
Els dos rectangles iguals tenen un vèrtex comú en el centre de la circumferència exterior i els costats adjacents són perpendiculars.



Dues circumferències iguals són tangents cadascuna a 3 costats dels dos rectangles.
I tangents interior a la circumferència exterior.
Calculeu el radi de les dues circumferències iguals i dels costats dels rectangles.
Prefectura de Tochigi

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT}=\overline{OC}=R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT}=r$
Siga el rectangle $OBCD$, $\overline{OB}=2r$
Siga $\overline{OD}=x$
Pel punt T tracem la recta tangent que intersecta les rectes OB, OD en els punts K, L, respectivament.
$\overline{KT}=\overline{OT}=R$
$\overline{KL}=2R, \overline{OK}=R\sqrt{2}$
La circumferència de centre P està inscrita al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{O}L$.
El radi és:

$$r=\frac{2\cdot\overline{OK}-\overline{KL}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}R=\left(\sqrt{2}-1\right)R$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\overset{\Delta}{D}C$:

$$x^2=R^2-4r^2=\left(8\sqrt{2}-11\right)R^2$$

$$x=\sqrt{8\sqrt{2}-11R}$$