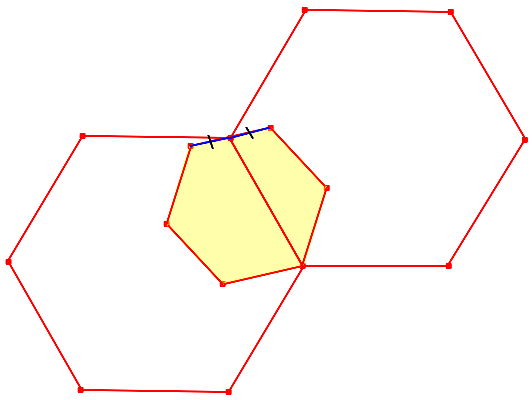
2921.- Donats dos hexàgons regulars iguals amb un costat comú es dibuixa un tercer hexàgon regular que té el punt mig d'un costat en un vèrtex del costat comú i el vèrtex consecutiu en l'altre vèrtex del costat comú.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i el total de l'àrea dels dos hexàgons iguals.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga l'hexàgon regular $CKLMNJ$ de costat $\overline{CK} = x$
Siga $D$ el punt mig del costat $\overline{ML}$

$\overline{CL} = x\sqrt{3}, \overline{DL} = \frac{1}{2}x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CLD}$:

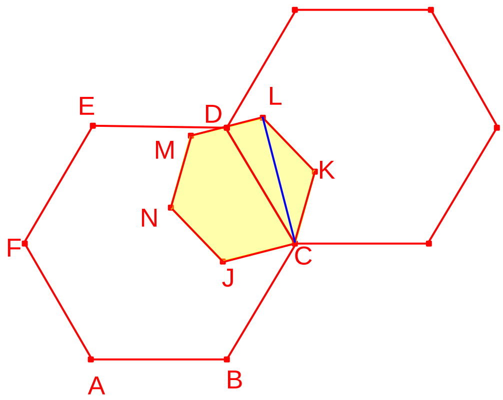
$c^2 = 3x^2 + \frac{1}{4}x^2$

Simplificant:

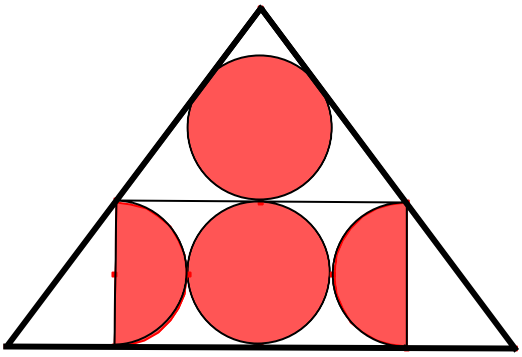
$\frac{x^2}{c^2} = \frac{4}{13}$

La proporció de les àrees és:

$\frac{S_{CKLMNJ}}{2 \cdot S_{ABCDEF}} = \frac{1}{2}\frac{S_{CKLMNJ}}{S_{ABCDEF}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$



2922.- En un triangle isòsceles s'han dibuixat dues circumferències i dues semicircumferències de radi r.
Calculeu la proporció dels costats i l'àrea del triangle.



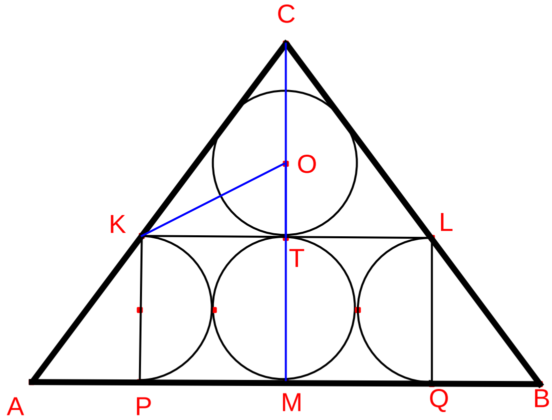
Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = r$
Siga el segment que conté el punt de tangència T i és paral·lel al costat $\overline{AB}$.
$\overline{KL} = 4r$
Siga $\angle OKT = \alpha, \angle BAC = 2\alpha$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$




Aleshores, la proporció dels costats és:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{6}{5}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}, \overset{\Delta}{APK}, \overset{\Delta}{KTC}$ són semblants.
$\overline{KT} = 2r, \overline{KP} = 2r$
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{CT} = \frac{4}{3}2r = \frac{8}{3}r, \overline{AP} = \frac{3}{2}r$

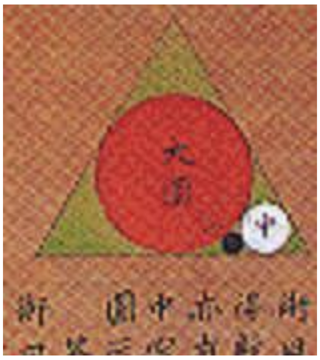
Aleshores:

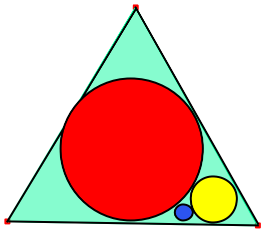
$\overline{AB} = 4r + 2\cdot\frac{3}{2}r = 7r, \overline{CM} = 2r + \frac{8}{3}r = \frac{14}{3}r$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 7r\cdot\frac{14}{3}r = \frac{49}{3}r^2$

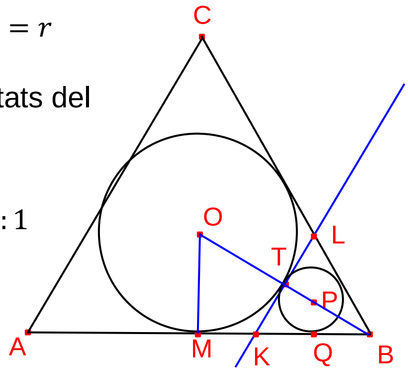
2923.- Donat un triangle equilàter s'ha inscrit un circumferència de radi r.
Una circumferència és tangent exterior a la inscrita i a dos costats del triangle.
Una circumferència és tangent a un costat i tangent exterior a les dues circumferències anteriors
Calculeu el radi de les circumferències.
*Prefectura de Saitama*





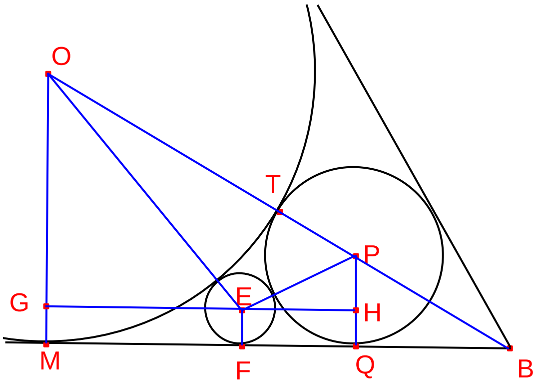
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre $O$.
Siga la circumferència inscrita al triangle de centre $O$ i radi $\overline{OM} = \overline{OT} = r$
$\overline{OC} = \overline{OB} = 2r$
La recta perpendicular al segment $\overline{OB}$ que passa per $T$, talla els costats del triangle en els punts $K, L$.
Siga la circumferència de centre $P$ i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = s$

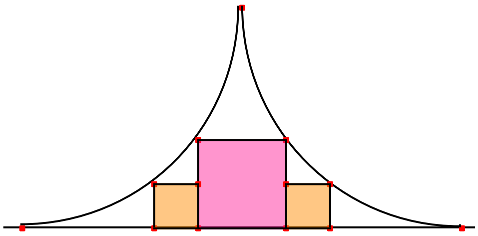



Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBL}$ són semblants i de raó $\overline{CM}: \overline{TB} = 3:1$
Aplicant el teorema de Tales:
$$s = \frac{1}{3}r$$

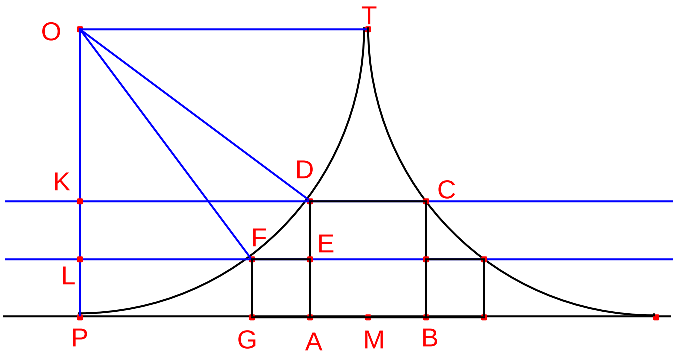
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$\overline{MB} = r\sqrt{3}$
Siga la circumferència de centre $E$ i radi $\overline{EF} = t$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OMB}, \overset{\Delta}{PQB}$ són semblants i de raó $\overline{OM}: \overline{PQ} = 3:1$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{MQ} = \frac{2}{3}\overline{MB} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
Siga $G$ la projecció de $E$ sobre $\overline{OM}$
Siga $H$ la projecció de $E$ sobre $\overline{PQ}$
$\overline{OE} = r + t, \overline{OG} = r - t, \overline{PE} = s + t, \overline{PH} = s - t,$
$$\overline{GH} = \overline{MQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{OGE}, \overset{\Delta}{PHE}$
$\overline{GE} = 2\sqrt{rt}, \overline{HE} = 2\sqrt{st}$
$$2\sqrt{rt} + 2\sqrt{st} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
$$\sqrt{rt} + \sqrt{\frac{1}{3}rt} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$
Resolent l'equació:
$$t = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}r$$



2924.- Donada una recta i dos arc iguals de radi $r$ tangents entre ells i tangents a la recta, s'han dibuixat tres quadrats. Calculeu la mesura dels costes dels quadrats.
*Prefectura Fukushima*



Solució:
Siga l'arc de centre $O$ i radi $\overline{OP} = \overline{OT} = r$
Com els dos arcs són tangents i iguals, és un quadrant.
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AG} = d$
Siga la $K$ projecció de $D$ sobre $\overline{OP}$




$\overline{OK} = r - c, \overline{KD} = r - \frac{1}{2}c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKD}$:

$$r^2 = (r+c)^2 + \left(r + \frac{1}{2}c\right)^2$$

Simplificant:
$5c^2 - 12rc + 4r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{c}{r} = \frac{2}{5}$

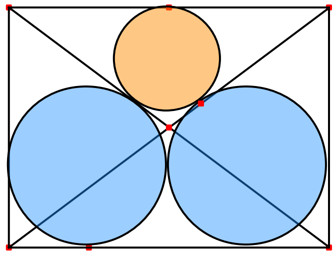
Siga la $L$ projecció de $F$ sobre $\overline{OP}$
$\overline{OL} = r - d, \overline{KD} = r - d - \frac{1}{2}c = \frac{4}{5}r - d$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLF}$:

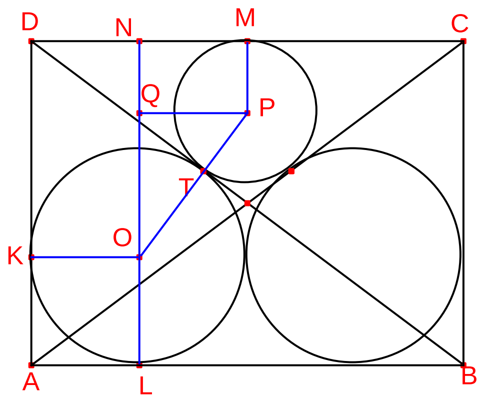
$$r^2 = (r+d)^2 + \left(\frac{4}{5}r - d\right)^2$$

Simplificant:
$25d^2 - 45rd + 8r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{d}{r} = \frac{1}{5}$

2925.- Dues circumferències d'igual radi r són tangents i cadascuna d'elles és tangent a dos costats d'un rectangle i a una diagonal.
Calculeu la mesura dels costats del rectangle i el radi de la circumferència tangent exterior a les anteriors i tangent al costat del rectangle.
*Prefectura Fukushima*



Solució:
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = r$
Siga el rectangle $ABCD$.
$\overline{AB} = 4r$
Siga $\overline{AD} = a$

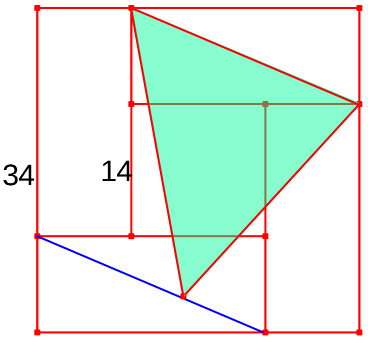



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \sqrt{16r^2 + a^2}$
La circumferència de centre $O$ està inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$.
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:
$r = \dfrac{\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{BD}}{2} = \dfrac{4r + a - \sqrt{16r^2 + a^2}}{2}$
$2r + a = \sqrt{16r^2 + a^2}$
Resolent l'equació:
$a = 3r$

Siga La circumferència de centre $P$ i radi $\overline{PM} = \overline{PT} = s$
La recta $OL$ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt $N$.
Siga $Q$ la projecció de $P$ sobre el segment $\overline{ON}$
$\overline{ON} = a - r = 2r$
$\overline{OQ} = 2r - s, \overline{PQ} = \overline{MN} = r, \overline{OP} = r + s$

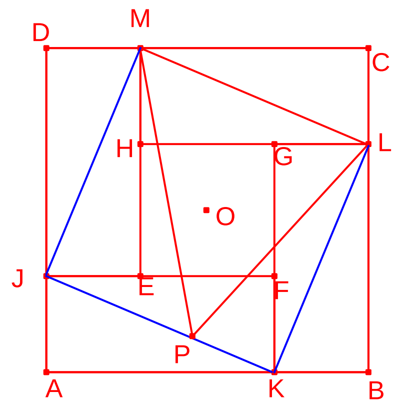
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$(r + s)^2 = r^2 + (2r - s)^2$.
Simplificant:
$4r^2 = 6rs$
$s = \dfrac{2}{3}r$

2926.- La figura consta de dos quadrats de costats 14 i 34, respectivament i quatre rectangles iguals. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.




Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 34$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = 14$
Els dos quadrats són concèntric.




El quadrilàter $JKLM$ format per les diagonals dels rectangles és un quadrat.

L'àrea el triangle $\overset{\Delta}{LMP}$ és la meitat de l'àrea del quadrat JKLM.

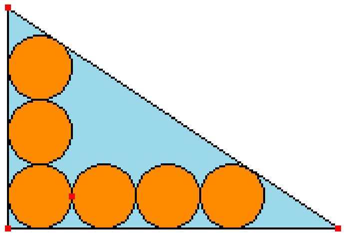
$\overline{AJ} = \frac{1}{2}(34 - 14) = 10$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JAK}$

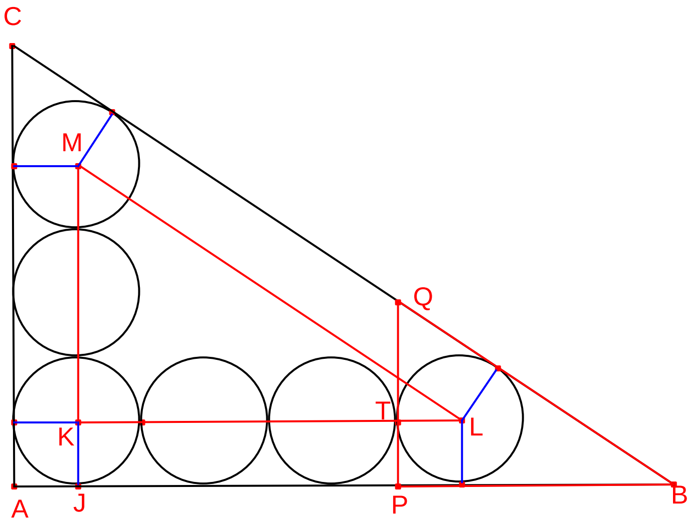
$\overline{JK} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$

$S_{LMP} = \frac{1}{2} \cdot 26^2 = 338$

2927.- En un triangle rectangle s'han inscrit sis circumferències iguals tangents de radi $r$.
Calculeu la proporció dels catets.
Calculeu la mesura dels catets.
*Prefectura de Fukushima*



Solució:




Siga el triangle rectangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siguen les circumferències de centres $K, L, M$ i radi $\overline{KJ} = \overline{LT} = r$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLM}$ són semblants.
$\overline{KL} = 6r, \overline{KM} = 4r$
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{b}{c} = \frac{\overline{KM}}{\overline{KL}} = \frac{4r}{6r} = \frac{2}{3}$
Pel punt de tangència $T$ tracem una perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en els punts $P, Q$.

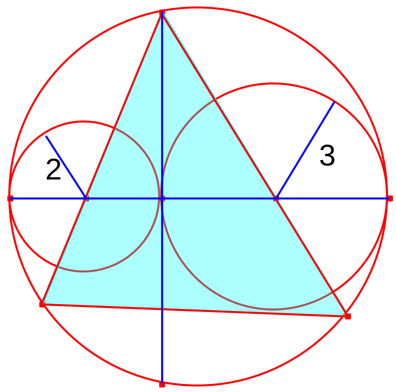
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PBQ}$ són semblants.
Siga $\overline{PQ} = 2k, \overline{PB} = 3k$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBQ}$:
$\overline{BQ} = k\sqrt{13}$

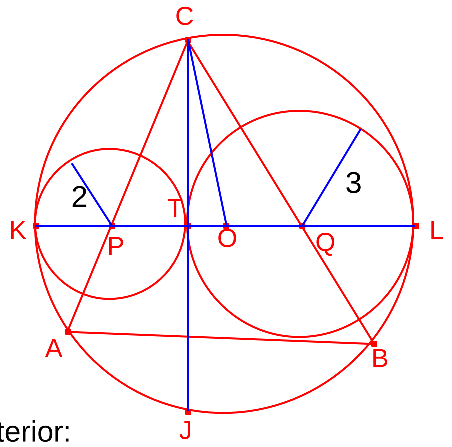
La circumferència de centre L està inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBQ}$.
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:
$r = \frac{\overline{PQ} + \overline{PB} - \overline{BQ}}{2} = \frac{2k + 3k - k\sqrt{13}}{2}$
$2r = \left(5 - \sqrt{13}\right)k$
Resolent l'equació:
$k = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} r$

Els catets del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són:
$\overline{AB} = 6r + 3k = \frac{17 + \sqrt{13}}{2} r, \overline{AC} = 4r + 2k = \frac{17 + \sqrt{13}}{3} r$

2928.- Sobre el diàmetre d'una circumferència s'han dibuixat dues circumferències tangents de radis 2 i 3. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.




Solució:




Siga la circumferència de centre $O$ i diàmetre $\overline{KL} = 10$
Siga la circumferència de centre $P$ i radi $\overline{PK} = \overline{PT} = 2$
Siga la circumferència de centre $Q$ i radi $\overline{QL} = \overline{QT} = 3$
$\overline{OT} = 1, \overline{OC} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTO}$:
$\overline{CT} = \sqrt{24}$

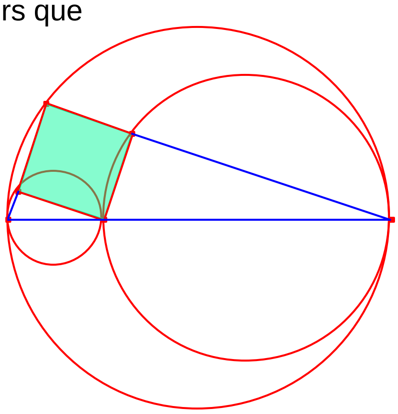
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTP}$:
$\overline{CP} = 2\sqrt{7}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTQ}$:
$\overline{CQ} = \sqrt{33}$

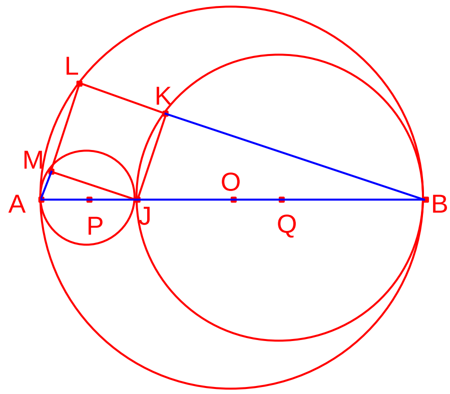
Aplicant la potència del punt $P$ respecte de la circumferència exterior:
$\overline{CP} \cdot \overline{AP} = \overline{KP} \cdot \overline{LP}$
$2\sqrt{7} \cdot \overline{AP} = 2 \cdot 8$
Aleshores:
$$\overline{AP} = \frac{8\sqrt{7}}{7}, \overline{AC} = \frac{22\sqrt{7}}{7}$$
Aplicant la potència del punt $Q$ respecte de la circumferència exterior:
$\overline{CQ} \cdot \overline{BQ} = \overline{KQ} \cdot \overline{LQ}$
$\sqrt{33} \cdot \overline{BQ} = 3 \cdot 7$
Aleshores:
$$\overline{BQ} = \frac{7\sqrt{33}}{11}, \overline{AC} = \frac{18\sqrt{33}}{11}$$
Siga $\alpha = \angle ACB$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PQC}$:
$5^2 = 28 + 33 - 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{33} \cdot \cos\alpha$
$$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{231}}{77}$$
Aleshores:
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{77 \cdot 50}}{77}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{22\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{18\sqrt{33}}{11} \cdot \frac{\sqrt{77 \cdot 50}}{77} = \frac{18\sqrt{150}}{7}$$

2929.- El cercle exterior té dues circumferències tangents interiors que tenen els centres en un diàmetre.
Les circumferències interiors són tangents exteriors i els diàmetres estan en proporció 1:3.
Si l'àrea del quadrat és 9, calculeu l'àrea del cercle exterior



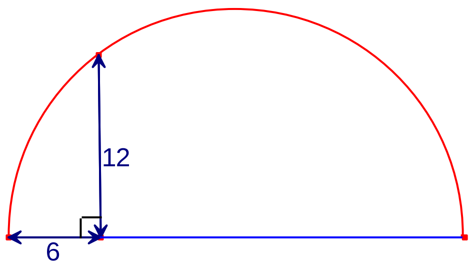
Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre P i diàmetre $\overline{AJ} = 2k$.
Siga la circumferència de centre Q i diàmetre $\overline{JB} = 6k$
$\overline{OA} = 4k$ radi de la circumferència exterior.
Siga el quadrat JKLM de costat $\overline{JK} = 3$



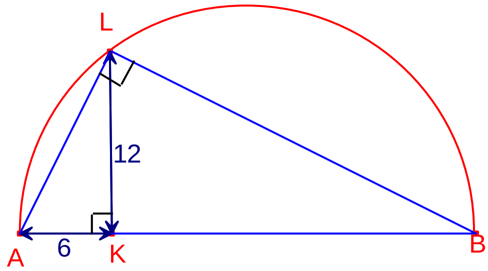

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMJ}, \overset{\Delta}{JKB}$ son semblants i de raó 1:3.
Aleshores:
$\overline{BK} = 3 \cdot \overline{JM} = 9$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JKB}$:
$(6k)^2 = 3^2 + 9^2 = 90$
$k^2 = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}$
L'àrea del cercle exterior és:
$S = \pi(4k)^2 = 40\pi$

2930.- Calculeu l'àrea del semicercle.




Solució:




Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$
Siga $K$ el punt del diàmetre tal $\overline{AK} = 6, \overline{KL} = 12, \angle AKL = 90°$.
El triangle $\overset{\Delta}{ALB}$ és rectangles $\angle ALB = 90°$
Siga $\overline{BK} = a$

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALB}$:
$12^2 = 6 \cdot a$
Resolent l'equació:
$= 24$
$\overline{AB} = 6 + a = 30$
L'àrea del semicercle és:
$S = \frac{1}{2}\pi 15^2 = \frac{225}{2}\pi \approx 353.43$