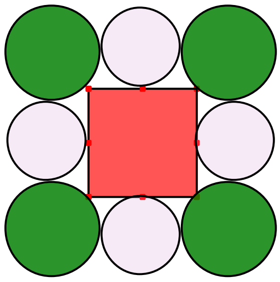
2931.- En la figura, les quatre circumferències que passen pels vèrtex (morades) tenen radi a, les circumferències tangents exteriors al quadrat en els punts migs (roges) tenen radi b

Determineu el costat del quadrat k en funció de a, b

Prefectura de Kioto



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = k$

Siga T el punt mig del costat $\overline{Bc}$

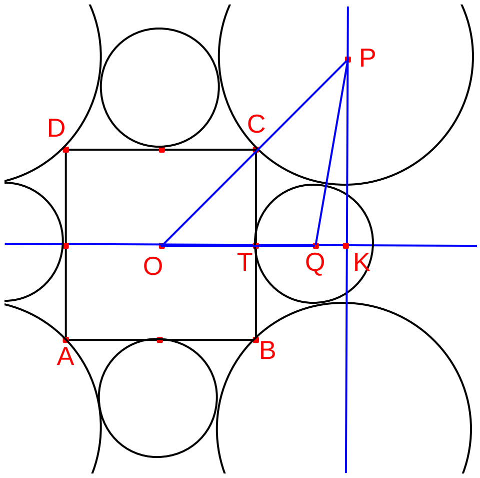
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PC} = a$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = b$

$\overline{OQ} = \frac{1}{2}k + b, \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}k + a$

Siga K la projecció de P sobre la recta OQ.

$\overline{OK} = \overline{PK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2}a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KKP}$:

$\overline{QK} = \sqrt{(a+b)^2 - \left(\frac{1}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$

$\overline{OK} = \overline{OQ} + \overline{QK}$

$\frac{1}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{2}k + b + \sqrt{(a+b)^2 - \left(\frac{1}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$

Simplificant:

$\sqrt{(a+b)^2 - \left(\frac{1}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{1}a - b$

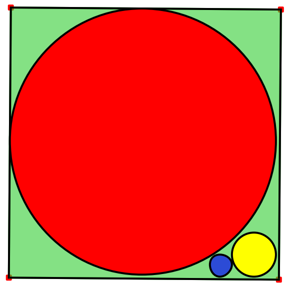
Elevant al quadrat i simplificant:

$k^2 + 2\sqrt{2}ak - 4\left(2 + \sqrt{2}\right)ab = 0$

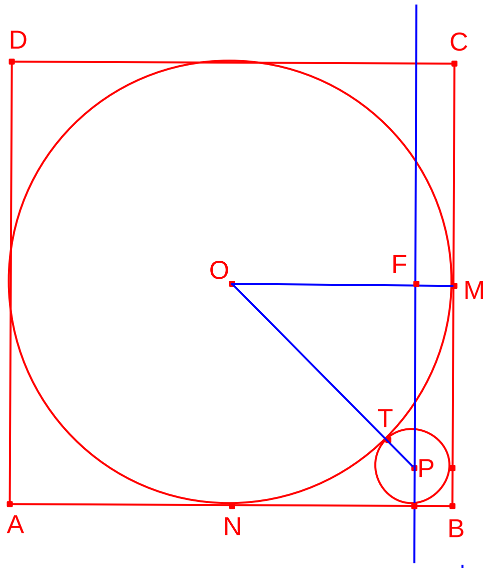
Resolent l'equació:

$k = -a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 + 4ab\left(2 + \sqrt{2}\right)}$

2932.- Donat un quadrat s'ha inscrit un circumferència de radi r.
Una circumferència és tangent exterior a la inscrita i a dos costats del quadrat.
Una circumferència és tangent a un costat i tangent exterior a les dues circumferències anteriors
Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura de Saitama

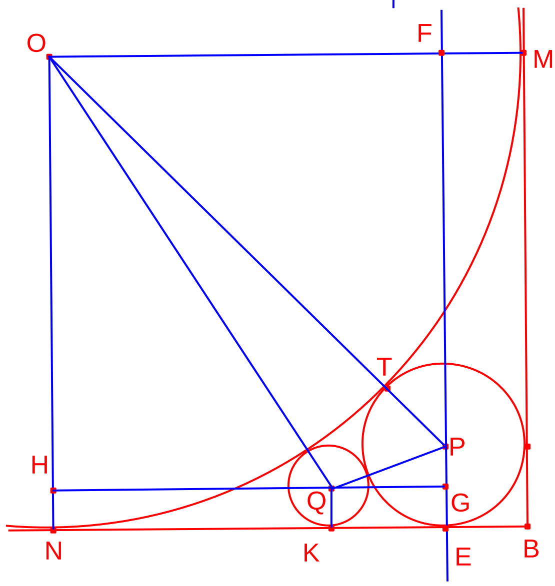


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Siga la circumferència inscrita al quadrat de radi $\overline{OM} = \overline{ON} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = s$ tangent exterior a la circumferència inscrita al quadrat i als costats del quadrat.
Pel punt P tracem una perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla el segment $\overline{OM}$ en el punt F.
$\overline{OT} = \overline{PF} = r - s, \overline{OP} = r + s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OFP}$:
r+s= $(r-s)\sqrt{2}$.
Resolent l'equació:
$s = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)r$

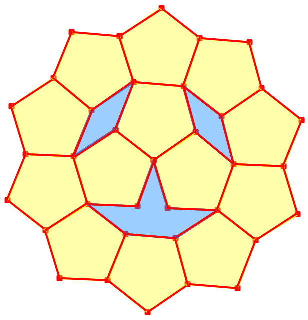


Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QK} = t$ tangent exterior a les altres dues circumferències i al costat del quadrat.
Siga H la projecció de Q sobre el segment $\overline{ON}$
Siga G la projecció de Q sobre la recta PF
Siga $a = \overline{HQ}, \overline{GQ} = r - s - a$
$\overline{OH} = r - t, \overline{OQ} = r + t$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHQ}$:
$a^2 = 4rt$

$\overline{PG} = s - t, \overline{PQ} = s + t$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHQ}$:
$4st = (r - s + a)^2$
$4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)rt = 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)r^2 + 4rt - 4\left(\sqrt{2} - 1\right)r2\sqrt{rt}$
Simplificant:
$2t - \left(1 + \sqrt{2}\right)r = 2\sqrt{rt}$
Resolent l'equació:
$$t = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}r$$
Notem que $t = \frac{1}{2}s$



2933.- La figura està formada per 13 pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre les àrees de la zona pintada de blau i la zona pintada de groc.



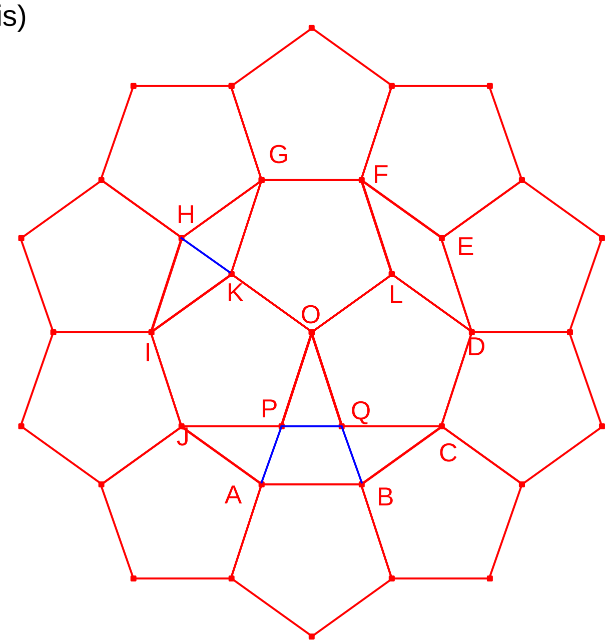
Solució:
Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{PQO}, \overset{\Delta}{HKG}$ són iguals (auris)

$$\overline{OB} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Siga $X = S_{ABCDEFGHIJ}$

$$S_{ABO} = \frac{1}{10}X$$

Siga $\overline{PQ} = c$



Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{PQO}, \overset{\Delta}{ABO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{c} = \frac{\Phi}{1}$$

$$c = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

$$\frac{S_{PQO}}{S_{ABO}} = c^2 = 2 - \Phi$$

$$S_{PQO} = \frac{1}{10}(2-\Phi)X$$

Siga $Y = S_{OLFGK}$ àrea del pentàgon regular.

$$3Y = X - \left(6 \cdot S_{PQO} + S_{ABO}\right) = X - \left(\frac{6}{10}(2-\Phi) + \frac{1}{10}\right)X = \frac{3}{10}(-1+2\Phi)X$$

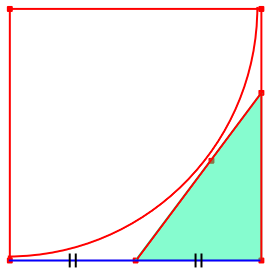
Aleshores:

$$Y = \frac{1}{10}(-1+2\Phi)X$$

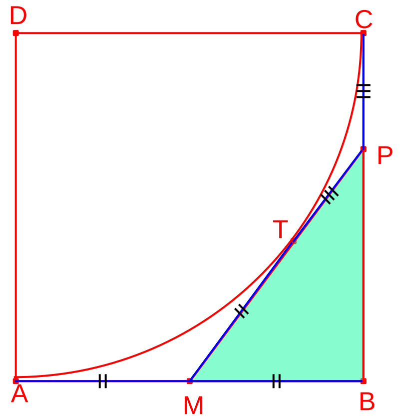
La proporció entre les àrees de la zona blava i la zona groga és:

$$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \frac{6 \cdot S_{PQO} + S_{ABO}}{13 \cdot S_{OLFGK}} = \frac{\left(\frac{6}{10}(2-\Phi) + \frac{1}{10}\right)X}{13 \cdot \frac{1}{10}(-1+2\Phi)X} = \frac{13-6\Phi}{13(-1+2\Phi)} = \frac{10-3\sqrt{5}}{13\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-3}{13}$$

2934.- Siga un quadrat i un quadrant amb centre el vèrtex d'un quadrat.
Des del punt mig d'un costat s'ha traçat una tangent al quadrat.
Determineu la proporció entre les àrees del triangle ombrejat i el quadrat.

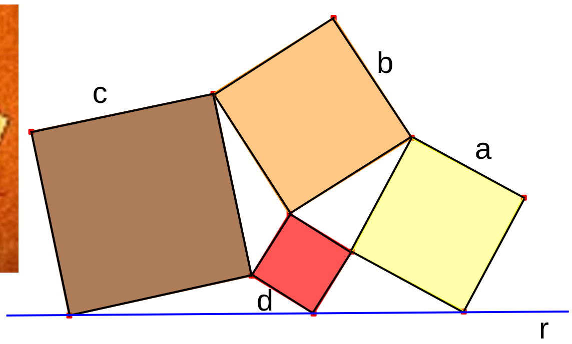


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{MP}$ tangent al quadrant de centre D i radi $\overline{AD} = 1$
Siga T el punt de tangència.

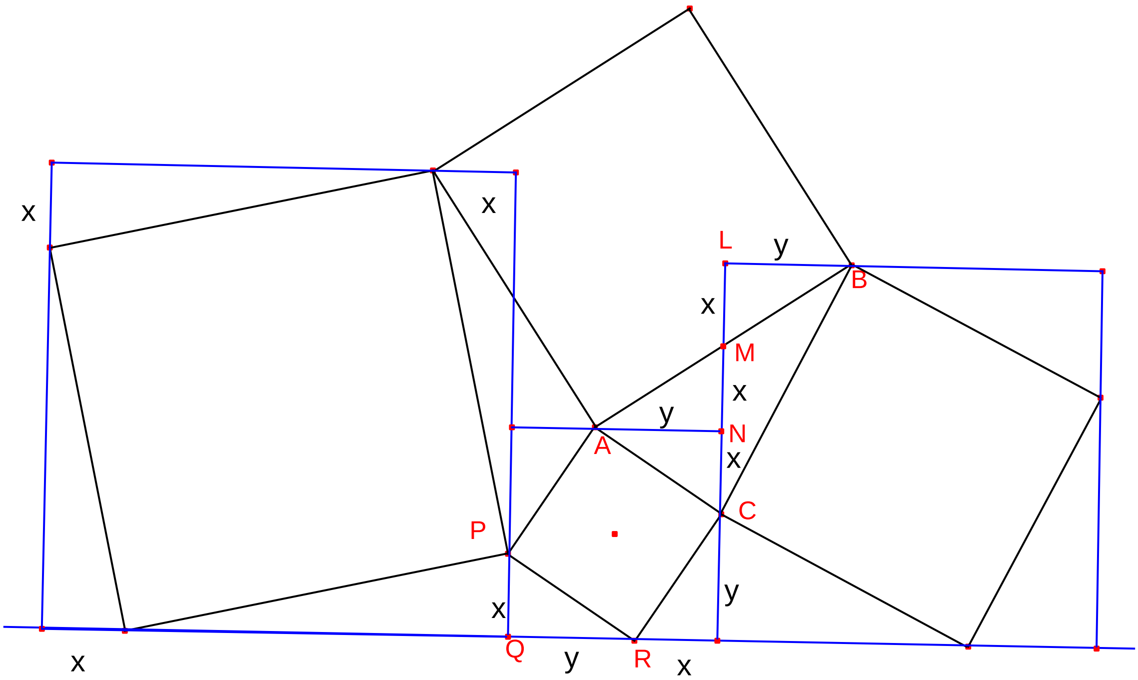


$\overline{AM} = \overline{MT} = \frac{1}{2}$
Siga $\overline{PC} = \overline{PT} = x$
$\overline{MP} = \frac{1}{2} + x, \overline{PB} = 1 - x, \overline{BM} = \frac{1}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBP}$:
$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
Resolent l'equació:
$x = \frac{1}{3}$
$\overline{BP} = \frac{2}{3}$
$S_{MBP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{MBP}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{6}$

2935.- Siguen tres quadrats de costats a, b, c, d tal que tres vèrtexs dels quadrats de costats a, c, d estan alineats.
Proveu que $b = 2d$



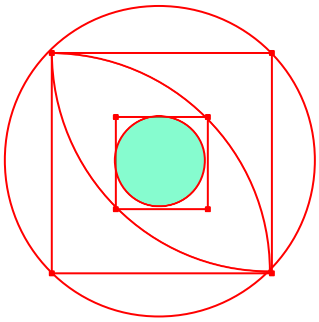
Solució:



Siga el quadrat de costat $\overline{AB} = b$
Siga el quadrat de costat $\overline{AC} = d$

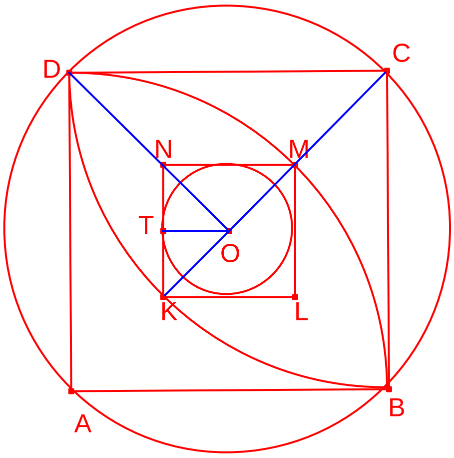
Siga $\overline{PQ} = x, \overline{QR} = y$
$\overline{BL} = \overline{AN} = y$
Aleshores, M és el punt mig del costat $\overline{AB}$
El triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANC}, \overset{\Delta}{ANM}$ són iguals.
Aleshores, $d = \overline{AC} = \overline{AM} = \frac{1}{2}b$

2936.- Determineu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Siga el quadrat $KLMN$ de centre O.
Siga $\overline{OC} = R$ radi de la circumferència circumscrita al quadrat $ABCD$.
Siga la circumferència de centre O inscrita en el quadrat $KLMN$ de radi $\overline{OT} = r$

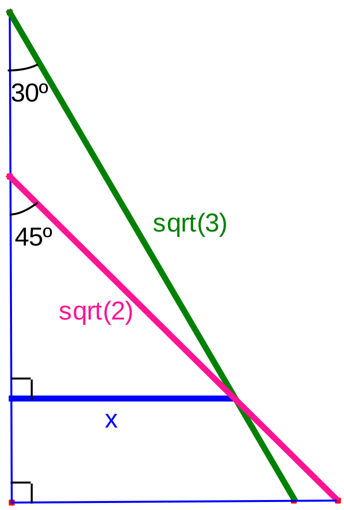


$$\overline{CD} = \overline{CK} = R\sqrt{2}$$
$$\overline{OK} = r\sqrt{2}$$
$$\overline{OK} = \overline{CK} - \overline{OC}$$
$$r\sqrt{2} = R\sqrt{2} - R$$
$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

2937.- En la figura els segments verd i morat mesuren $\sqrt{3}, \sqrt{2}$, respectivament.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}. 30°, 60°, 90°$

$\overline{AC} = 3, \overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{AC} = \overline{AE} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLC}. 30°, 60°, 90°$

$\overline{LC} = 2x, \overline{KC} = x\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KLE}$:

$\overline{KE} = x$

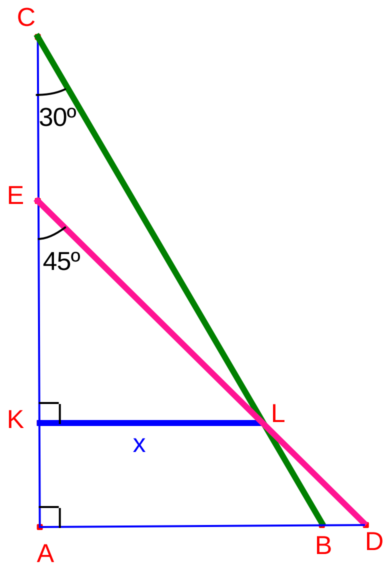
$\overline{AK} = 1 - x$

$\overline{AC} = \overline{AK} + \overline{KC}$

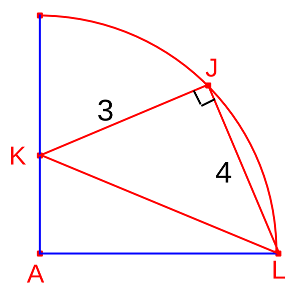
$\frac{3}{2} = x\sqrt{3} + 1 - x$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

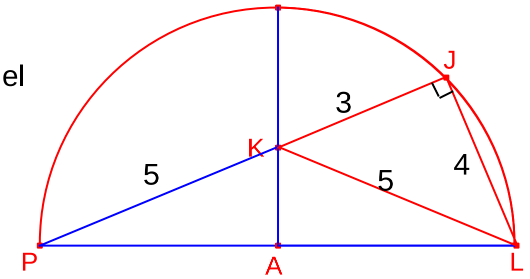


2938.- En un quadrant s'ha dibuixat un triangle rectangle de catets 3, 4.
Calculeu l'àrea del quadrant.



Solució:

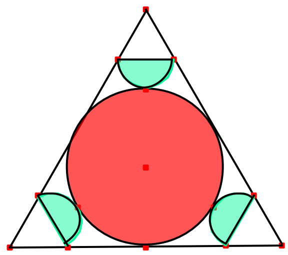
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{JKL}$:
$\overline{KL} = 5$
Dibuixem la recta JK que talla la recta AL en el punt P.
Els segment $\overline{PL} = 2R$ és diàmetre del cercle que conté el quadrant.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{AKP}$ són iguals.
Aleshores: $\overline{PK} = \overline{KL} = 5$

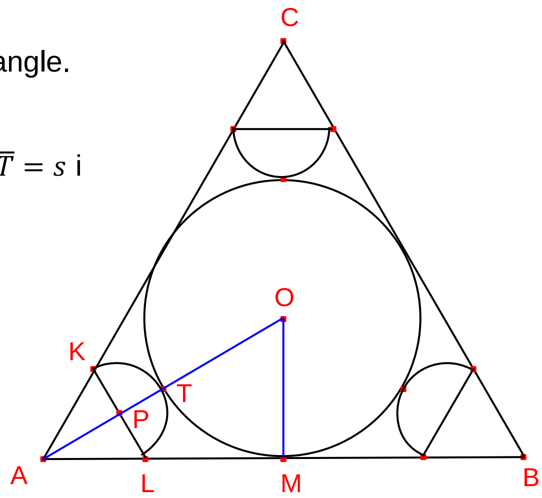
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{PJL}$:
$4R^2 = 8^2 + 4^2 = 80$
$R^2 = 20$
L'àrea del quadrant és:
$S = \frac{1}{4}\pi R^2 = 5\pi$

2939.- En un triangle equilàter s'ha dibuixat la circumferència inscrita i tres semicircumferències tangents exteriors a la circumferència amb els extrems dels diàmetres en els costats del triangle.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels tres semicercles i l'àrea del cercle inscrit en el triangle equilàter.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.
Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència inscrita al triangle.
$\overline{OA} = 2r$



Siga P el centre de la semicircumferència de radi $\overline{PT} = s$ i diàmetre $\overline{KL} = 2s$.

$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{KL} = s\sqrt{3}$

$\overline{AP} + \overline{PT} + \overline{OT} = \overline{OA}$

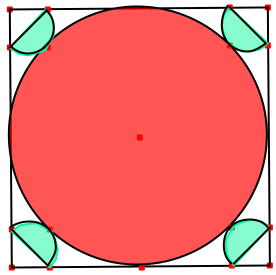
$s\sqrt{3} + s + r = 2r$

$\frac{s}{r} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{\frac{3}{2}s^2}{r^2} = \frac{3}{2}\frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4}$$

2940.- En un quadrat s'ha dibuixat la circumferència inscrita i quatre semicircumferències tangents exteriors a la circumferència amb els extrems dels diàmetres en els costats del quadrat.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quatre semicercles i l'àrea del cercle inscrit en el quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència inscrita al quadrat.
$\overline{OA} = r\sqrt{2}$

Siga P el centre de la semicircumferència de radi $\overline{PT} = s$ i diàmetre $\overline{KL} = 2s$.
$\overline{AP} = s$
$\overline{AP} + \overline{PT} + \overline{OT} = \overline{OA}$
$s + s + r = r\sqrt{2}$
$\frac{s}{r} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$
La proporció de les àrees és:
$\frac{2s^2}{r^2} = 2\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$