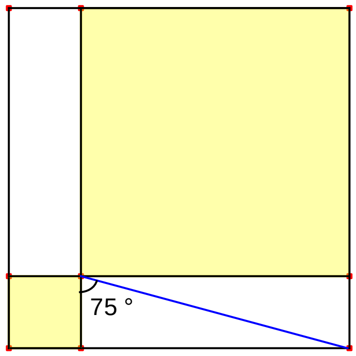
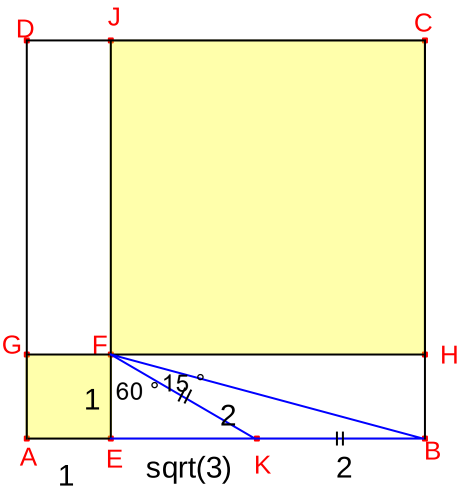
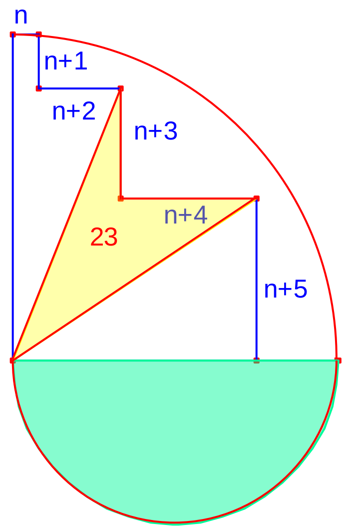
2941.- La figura conté tres quadrats.
L'angle que forma la diagonal del rectangle i el costat menut del rectangle és 75º
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i el quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$..
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = 1$
Siga $\angle BFE = 75°$
Siga un punt K del costat $\overline{AB}$ tal que $\angle KFE = 60°$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{FKB}$ és isòsceles.
$\overline{FK} = 2 \cdot \overline{FE} = 2, \overline{EK} = \sqrt{3}$
$\overline{KB} = \overline{FK} = 2$
$\overline{AB} = 3 + \sqrt{3}, \overline{FH} = 2 + \sqrt{3}$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{AEFG} + S_{FHCJ}}{S_{ABCD}} = \frac{1^2 + (2+\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3}$$



2942.- En la figura, sobre el radi del quadrant s'ha dibuixat un semicercle i un quadrilàter d'àrea 23. Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:

Siga el quadrant de centre A i radi $\overline{AB} = \overline{AC} = 3n + 9$

Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \frac{1}{2}(3n + 9)$

Siga el quadrilàter $AKLM$ d'àrea 23.

$$S_{AKLM} = S_{LMA} + S_{LKA} = \frac{1}{2}(n + 3)(2n + 2) + \frac{1}{2}(n + 4)(n + 5) = 23$$

Simplificant:

$3n^2 + 17n - 20 = 0$

Resolent l'equació:

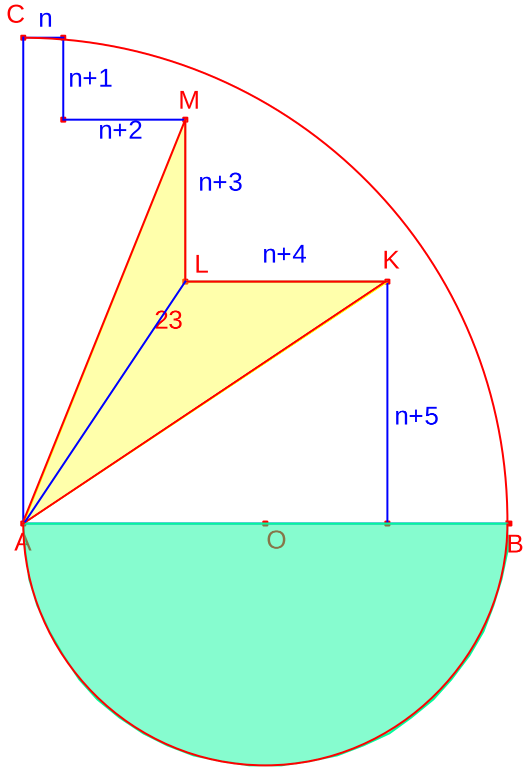
$n = 1$

El radi del semicercle és:

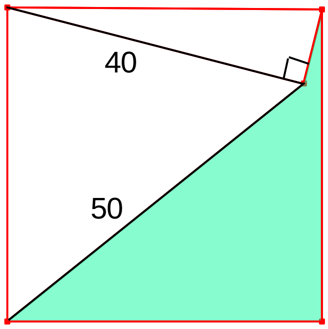
$\overline{OA} = 6$

L'àrea del semicercle és:

$$S = \frac{1}{2}\pi 6^2 = 18\pi$$



2943.- En el quadrat de la figura, calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



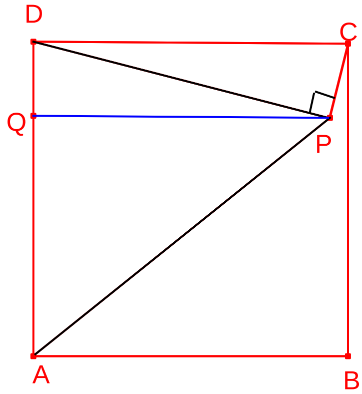
Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen $\overline{AP} = 50, \overline{DP} = 40$

Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$

Siguen $\overline{DQ} = x, \overline{PQ} = y$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DPC}, \overset{\Delta}{PQD}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{40}{c} = \frac{y}{40} = \frac{x}{\sqrt{c^2 - 40^2}}$$

$cx = 40\sqrt{c^2 - 40^2}, cy = 1600$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQP}, \overset{\Delta}{PQD}$

$40^2 - x^2 = 50^2 - (c - x)^2$

Simplificant:

$2cx = c^2 - 900$

$240\sqrt{c^2 - 40^2} = c^2 - 900$

Resolent l'equació:

$c^2 = 1700, c^2 = 6500$

Si $c^2 = 1700, c = 10\sqrt{17}, cx = 400$

Aleshores,

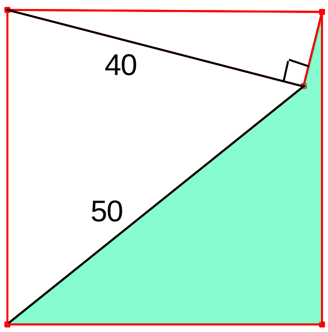
$$S_{ABCP} = c^2 - \frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}cx = 1700 - 800 - 200 = 700$$

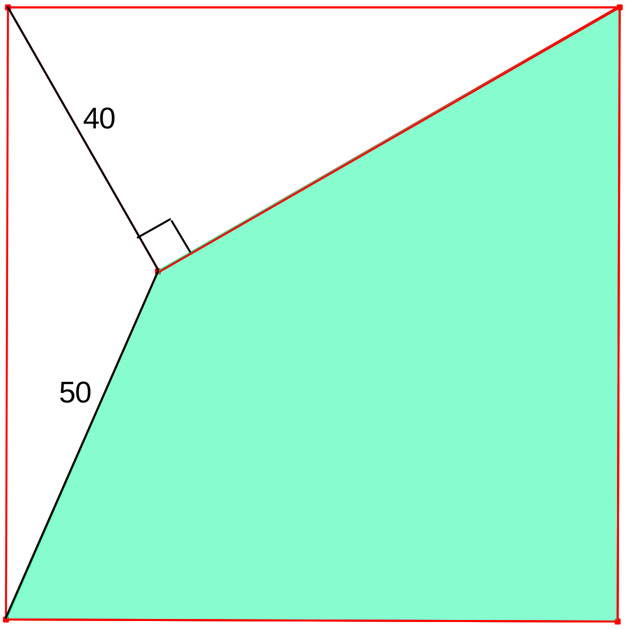
Si $c^2 = 6500, c = 10\sqrt{65}, cx = 2800$

Aleshores,

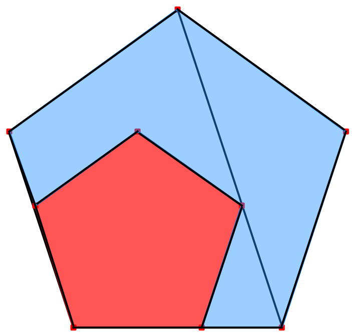
$$S_{ABCP} = c^2 - \frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}cx = 6500 - 800 - 1400 = 4300$$

El problema té dues solucions:

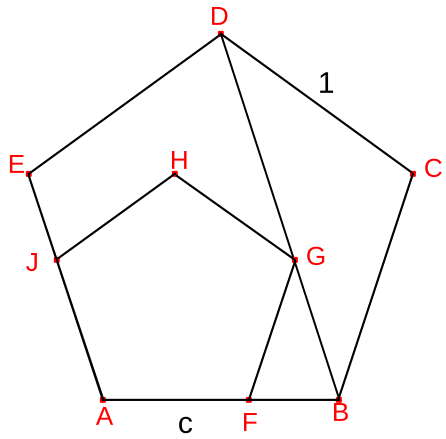




2944.- En la figura hi ha dos pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l’àrea blava i l’àrea roja.



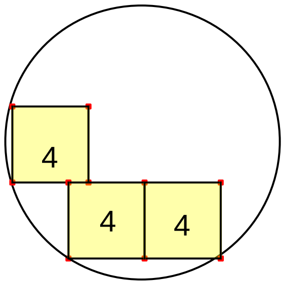
Solució:
Siga el pentàgon regular ABCDE de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el pentàgon regular AFGHJ de costat $\overline{AF} = c$
$\overline{FB} = 1 - c$
$\overline{FG} = c = \overline{FB} \cdot \Phi = (1-c)\Phi$
$c = (1-c)\Phi$
$(1+\Phi)c = \Phi$
$c = \dfrac{\Phi}{1+\Phi} = \dfrac{\Phi}{\Phi^2} = \dfrac{1}{\Phi}$



La proporció entre l’àrea de la regió blava i la roja és:

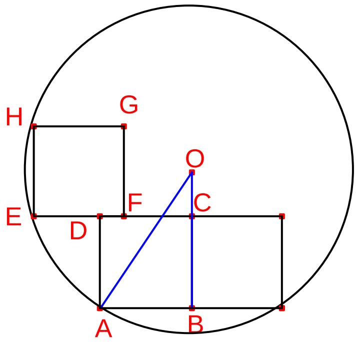
$$\frac{S_{FBCDEJHG}}{S_{AFGHJ}} = \frac{S_{ABCDE} - S_{AFGHJ}}{S_{AFGHJ}} = \frac{S_{ABCDE}}{S_{AFGHJ}} - 1 = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}\right)^2 - 1$$
$$= \Phi^2 - 1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2945.- Dins d'un cercle s'han dibuixat tres quadrats d'àrea 4. Calculeu l'àrea del cercle.

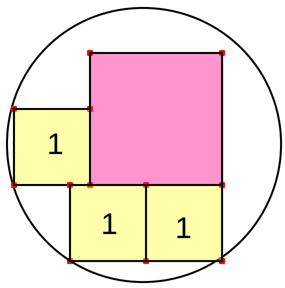


Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, EFGH$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
$\overline{OB} = 3$

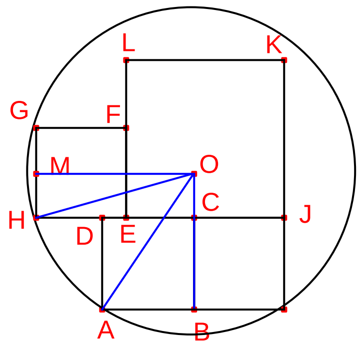
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$R^2 = 13$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi R^2 = 13\pi$



2946.- Dins d'un cercle s'han dibuixat tres quadrats d'àrea 1 i un de color morat.
Calculeu l'àrea del quadrat morat.

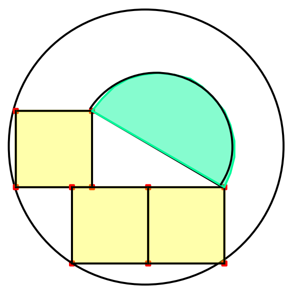


Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, EFGH$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
$\overline{OB} = \frac{3}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$R^2 = \frac{13}{4}$

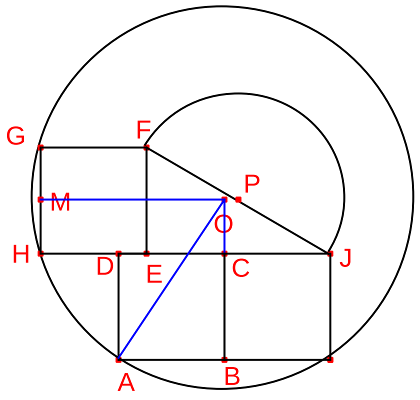


Siga M el punt mig del costat $\overline{Gh}$
Siga el quadrat $EJKL$.
$\overline{EJ} = \overline{OM}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMH}$:
$\overline{EJ}^2 = R^2 - \overline{MH}^2 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} = 3$

2947.- Dins d'un cercle s'han dibuixat tres quadrats iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del cercle.



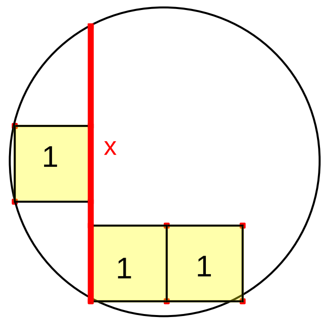
Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, EFGH$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
$\overline{OB} = \frac{3}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$R^2 = \frac{13}{4}$



Siga M el punt mig del costat $\overline{GH}$
Siga el quadrat $EJKL$.
$\overline{EJ} = \overline{OM}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMH}$:
$\overline{EJ}^2 = R^2 - \overline{MH}^2 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FEJ}$:
$\overline{FJ} = 2$
Siga P el centre del semicercle de diàmetre $\overline{FJ} = 2$
La proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del cercle és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot 1}{\pi \frac{13}{4}} = \frac{2}{13}$$

2948.- Dins d'un cercle s'han dibuixat tres quadrats d'àrea 1. Calculeu la mesura de la corda x.

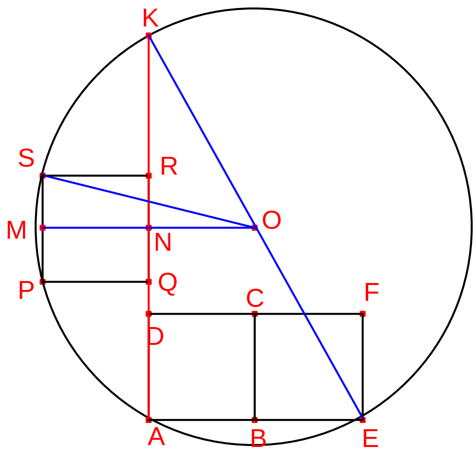


Solució:

Siguen els quadrats $ABCD, BEFC, PQRS$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r$

Siga la corda $\overline{AK} = x$



Siga M el punt mig del costat $\overline{PS}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SMO}$

$$r^2 = 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

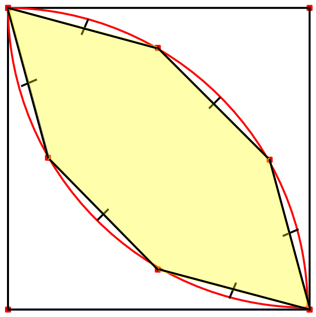
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KAE}$:

$4r^2 = 2^2 + x^2$

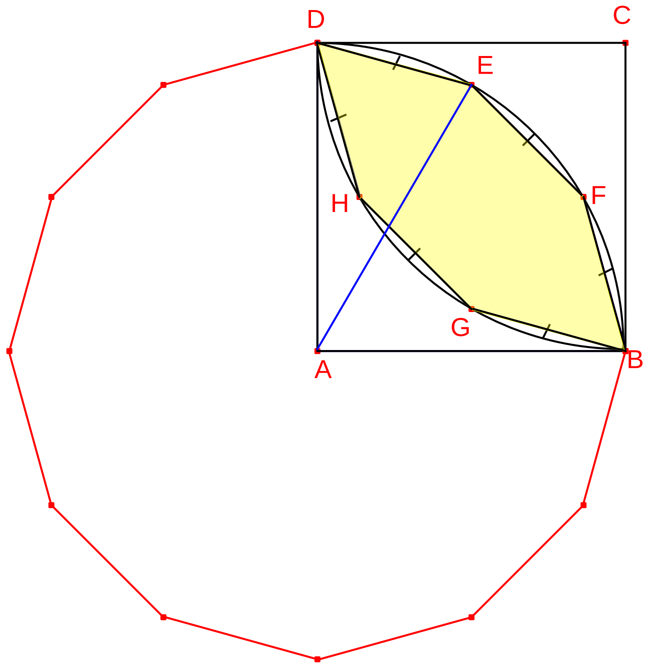
Resolent l'equació:

$x = \sqrt{13}$

2949.- En un quadrat s’ha dibuixat dos quadrants amb centres dos vèrtexs oposats.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea del quadrat.

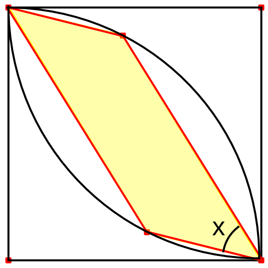


Solució:

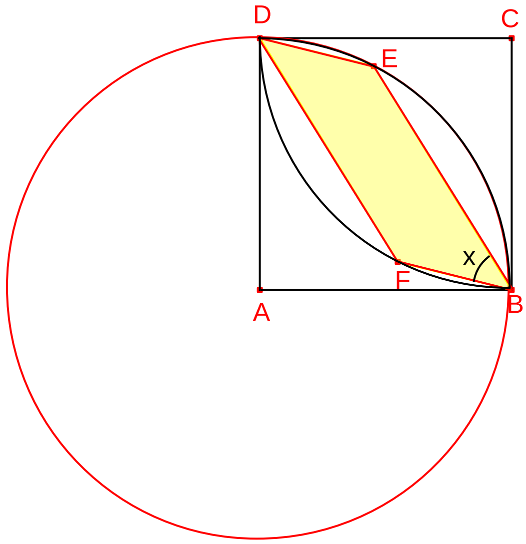


Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l’hexàgon $DEFBGH$ equilàter.
Els vèrtexs D, E, F, B són vèrtex d’un dodecàgon regular de centre A.
$\angle BDE = 30°$
Aleshores, $\angle HDE = 60°$
Per tant, $\overset{\Delta}{DEH}, \overset{\Delta}{BFG}$ són equilàters, $EFGH$ és un quadrat.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$
$\overline{DE}^2 = 2 - \sqrt{3}$
L’àrea de l’hexàgon $DEFBGH$ és:
$$S_{DEFGH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{DE}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{DEFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

2950.- En un quadrat s’ha dibuixat dos quadrants amb centres dos vèrtexs oposats.
Entre els dos quadrants s’ha dibuixar un paral·lelogram
Calculeu l’angle x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el paral·lelogram $DEBF$.



L’angle $\angle DEB$ és inscrit en la circumferència de centre O i radi $\overline{AE}$

$$\angle DEB = \frac{1}{2}270° = 135°$$

$$x = \angle FBE = 180° - 135° = 45°$$