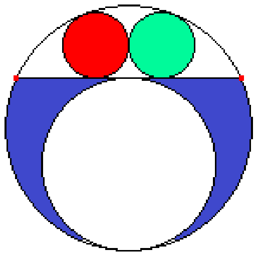
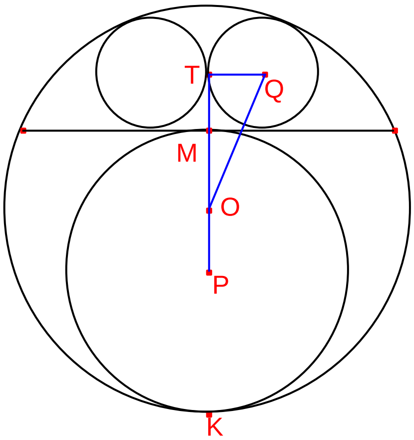
2951.- En la figura hi ha tres circumferències menudes de radi r i una gran de radi s en el interior d'una circumferència.
Calculeu el diàmetre de la circumferència exterior.
Prefectura de Nagasaki



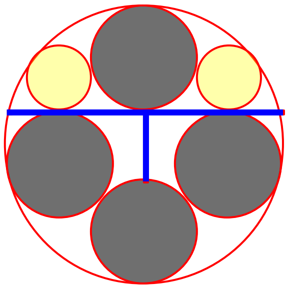
Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OK} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PM} = s$
Siga la circumferència menuda de centre Q i radi $\overline{QT} = r$



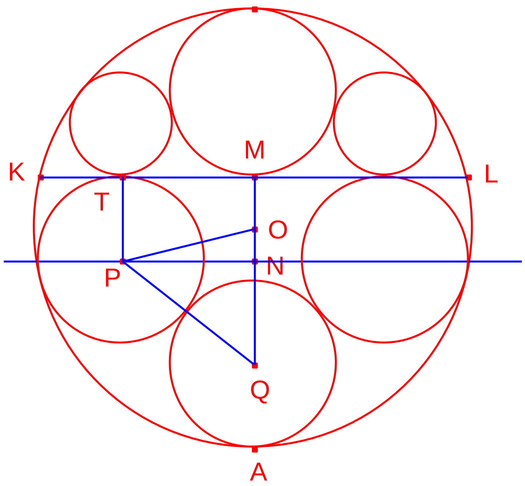
$\overline{OQ} = R - r, \overline{TM} = r$
$\overline{OM} = \overline{MK} - \overline{OK} = 2s - R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTQ}$:
$(R - r)^2 = r^2 + (r + 2s - R)^2$
Simplificant:
$r^2 + 4s^2 + 4rs - 4Rs = 0$
Resolent l'equació:
$$R = \frac{(r + 2s)^2}{4s}$$
El diàmetre de la circumferència exterior és:
$$d = 2R = \frac{(r + 2s)^2}{2s}$$

2952.- Una circumferència de radi R conté quatre circumferències iguals i altres dues iguals.
Calculeu el radi de totes les circumferències.
Prefectura de Fukushima

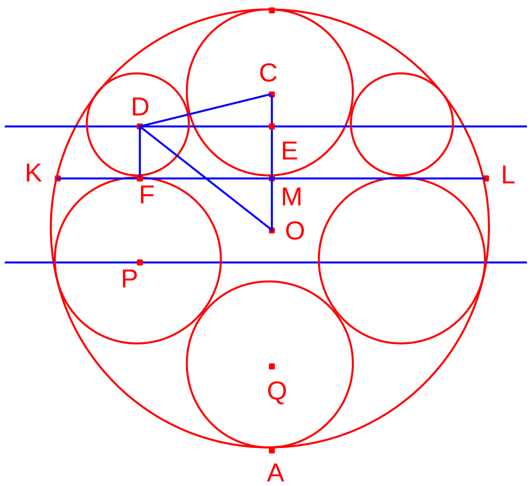


Solució:
Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siguen les circumferències de centre P, Q i radi $\overline{PT} = r$
Siga N la projecció de P sobre el segment $\overline{OQ}$
$\overline{OP} = R - r, \overline{PQ} = 2r$, $\overline{OQ} = R - r$
$\overline{OM} = R - 2r$
$\overline{ON} = 3r - R, \overline{QN} = 2R - 4r$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ONP}, \overset{\Delta}{QNP}$:
$\overline{PN}^2 = (R - r)^2 - (3r - R)^2 = (2r)^2 - (2R - 4r)^2$
Simplificant:
$r^2 - 3Rr + R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} R$$

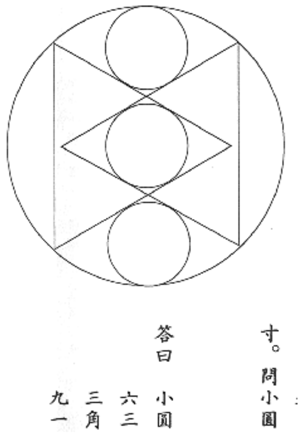


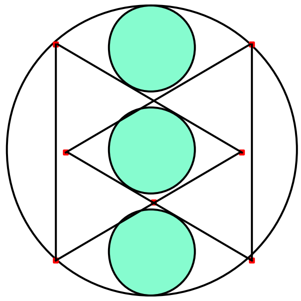
Siga la circumferència de centre C i radi $\overline{CM} = R$
Siga la circumferència de centre d i radi $\overline{DF} = s$
$\overline{OC} = R - r, \overline{CD} = r + s, \overline{OD} = R - s$
Siga E la projecció de D sobre el segment $\overline{OC}$
$\overline{CE} = r - s, \overline{OE} = R - 2r + s$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{CED}, \overset{\Delta}{OED}$:
$\overline{DE}^2 = (r + s)^2 - (r - s)^2 = (R - s)^2 - (R - 2r + s)^2$
Simplificant:
$-Rs - r^2 + Rr = 0$
$$s = \frac{(R - r)r}{R} = \left(-2 + \sqrt{5}\right)R$$



2953.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat dos triangles equilàters iguals amb els costats paral·lels. En les interseccions dels dos triangles i a l'exterior dels dos triangles s'han dibuixat tres circumferències d'igual radi. Calculeu el radi de les tres circumferències.
Prefectura d'Ishikawa





Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PA} = r$
Siga B el punt intersecció dels dos triangles equilàters.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKB}$:

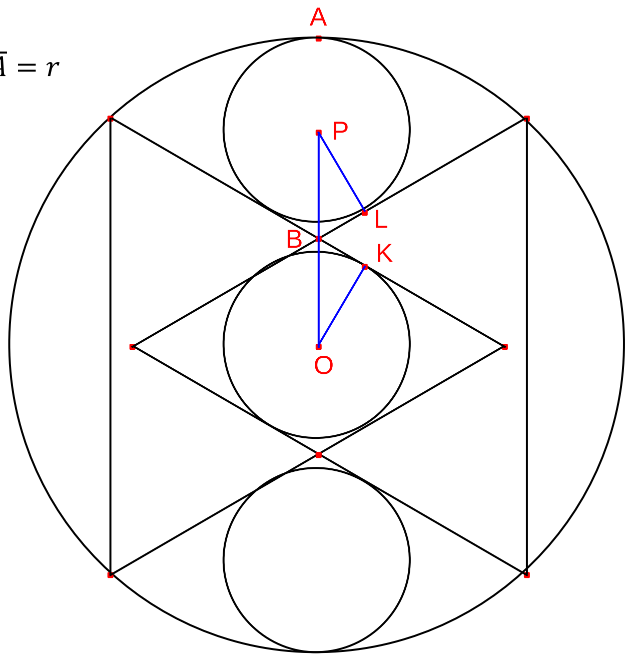
$$\overline{OB} = \overline{PB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

$$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{OB} + r = R$$

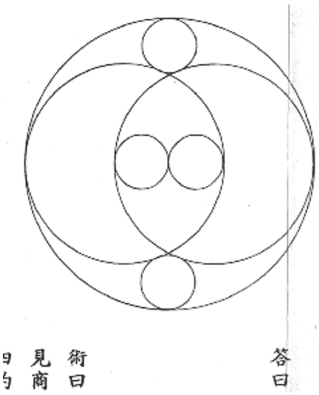
$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) r = R$$

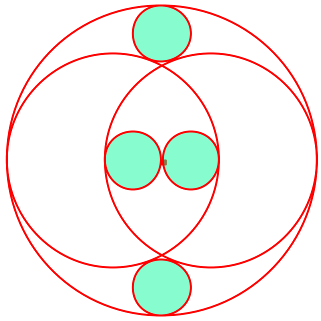
Resolent l'equació:

$$r = \frac{4\sqrt{3} - 3}{13}$$

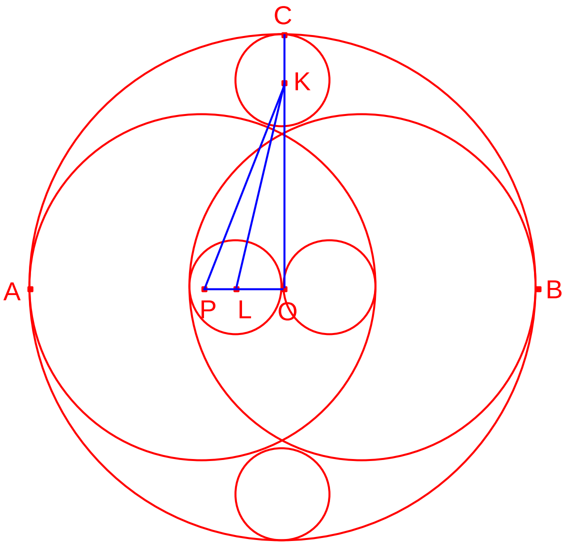


2954.- En una circumferència exterior de radi R s'han dibuixat dues circumferències mitjanes iguals i quatre circumferències menudes.
Calculeu el radi de les circumferències.
Prefectura d'Ishikawa





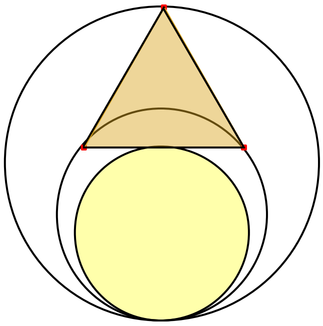
Solució:



Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PA} = r$
Siga les circumferències de centres L, K i radis $\overline{LO} = \overline{KC} = t$

$\overline{AB} = 4 \cdot \overline{PA} - 4 \cdot \overline{LO}$
$4r - 4t = 2R$
Aleshores:
$$r = \frac{R + 2t}{2}$$
$$\overline{OK} = R - t, \overline{OP} = R - r = \frac{R - 2t}{2}, \overline{PK} = r + t = \frac{R + 4t}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POK}$:
$$\left(\frac{R + 4t}{2}\right)^2 = \left(\frac{R - 2t}{2}\right)^2 + (R - t)^2$$
Simplificant:
$2t^2 + 5Rt - R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$$t = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} R$$
$$r = \frac{R + 2t}{2} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4} R$$

2955.- En una circumferència de radi R s'han inscrit dues circumferències tangents interiors en el mateix punt de tangència.
El radi de la circumferència menuda és r.
Un triangle equilàter és tangent a la circumferència menuda i té dos vèrtexs en la circumferència mitjana i l'altre en la circumferència exterior.
Calculeu el radi de la circumferència mitjana.
Prefectura Nagasaki



Solució:
Siga la circumferència gran de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OC} = R$
Siga la circumferència menuda de centre Q i radi $\overline{QM} = \overline{QT} = r$
Siga la circumferència mitjana de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PB} = s$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{MC} = 2(R - r)$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:

$$\overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 2(R - r)$$

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (R - r)$$

$$\overline{PM} = 2r - s$$

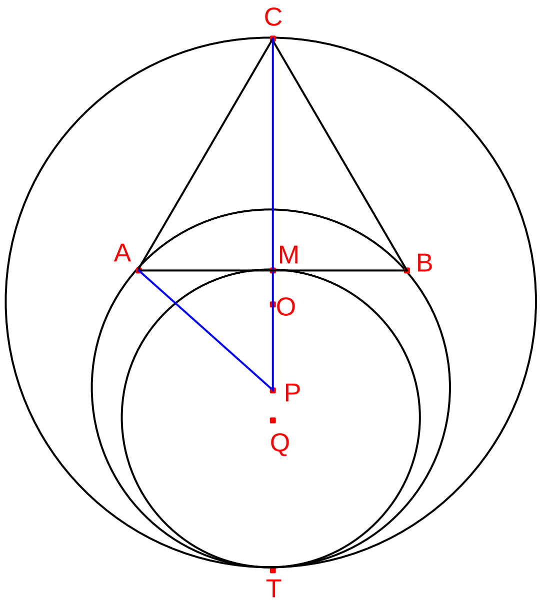
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMA}$:

$$s^2 = (2r - s)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (R - r)\right)^2$$

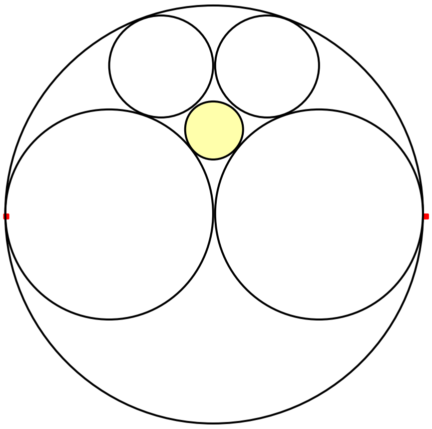
Simplificant:

$$3rs = 4r^2 - 2Rr + R^2$$

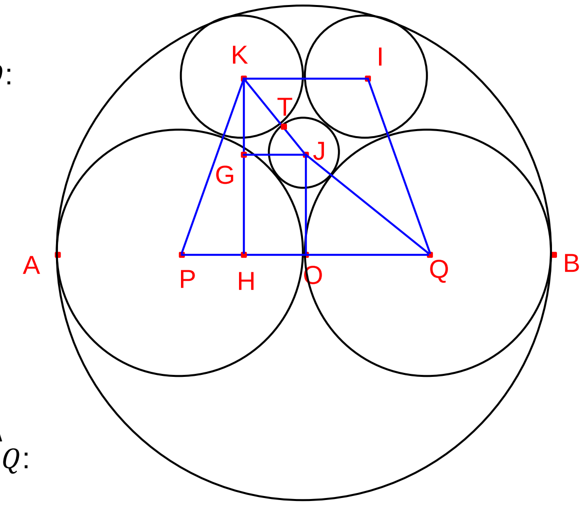
$$s = \frac{R^2 - 2Rr + 4r^2}{3r}$$



2956.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.

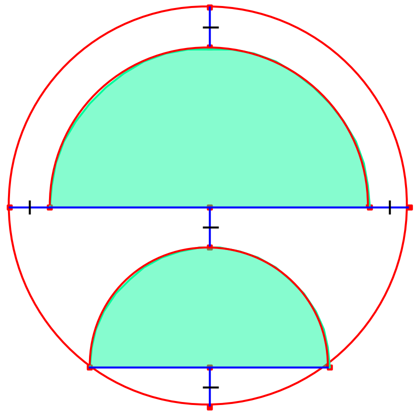


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 2r$
Siguen les circumferències de centres P, Q i radi $\overline{PA} = \overline{QB} = r$
Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KT} = s$
Siga la circumferència de centre J i radi $\overline{JT} = t$
Siga H la projecció de K sobre el segment $\overline{PQ}$
$\overline{PK} = r + s, \overline{PH} = r - s, \overline{OK} = 2r - s, \overline{HO} = s$

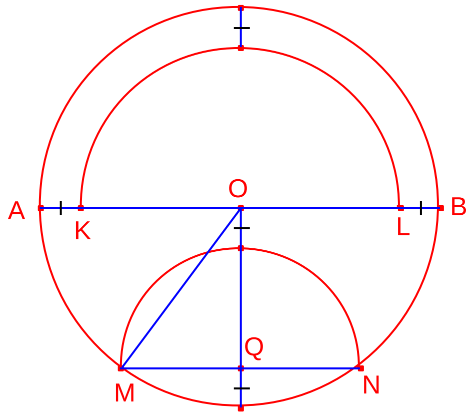


Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $P\overset{\Delta}{H}K, K\overset{\Delta}{H}O$:
$(r + s)^2 - (r - s)^2 = (2r - s)^2 - s^2$
Simplificant:
$2rs = r^2, s = \frac{1}{2}r$
Aplicant el teorema de Pitàgores $P\overset{\Delta}{H}K$
$\overline{KH} = r\sqrt{2}$
Siga $\overline{JO} = a$
Siga G la projecció de J sobre el segment $\overline{KH}$.
$\overline{QJ} = r + t$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $J\overset{\Delta}{O}Q$:
$(r + t)^2 = r^2 + a^2$
Simplificant:
$a^2 = t^2 + 2rt$
$\overline{KJ} = s + t = \frac{1}{2}r + t, \overline{GJ} = s, \overline{KG} = r\sqrt{2} - a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{G}J$:
$\left(\frac{1}{2}r + t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + \left(r\sqrt{2} - a\right)^2$
$t^2 + rt = 2r^2 + a^2 - 2\sqrt{2}ra$
$t^2 + rt = 2r^2 + t^2 + 2rt - 2\sqrt{2}ra$
Simplificant:
$a = \frac{\sqrt{2}}{4}t + \frac{\sqrt{2}}{2}r$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t + \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = t^2 + 2rt$
Simplificant:
$7t^2 + 12rt - 4r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$t = \frac{2}{7}r$
La proporció entre les àrees és:
$\frac{S_J}{S_O} = \frac{\pi t^2}{\pi(2r)^2} = \frac{1}{49}$

2957.- Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga $\overline{AK} = \overline{BL} = a$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = r = R - a$
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QM} = s = R - 2a$
$\overline{OM} = R, \overline{OQ} = R - a$



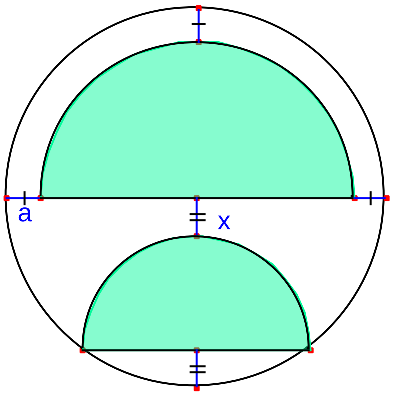
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQO}$:
$R^2 = (R-a)^2 + (R-a)^2$
Resolent l'equació:
$R = 5x$
$r = 5x - a, s = 3x$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}(r^2 + s^2)}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{16}{25}R^2 + \frac{9}{25}R^2\right)}{R^2} = \frac{1}{2}$$

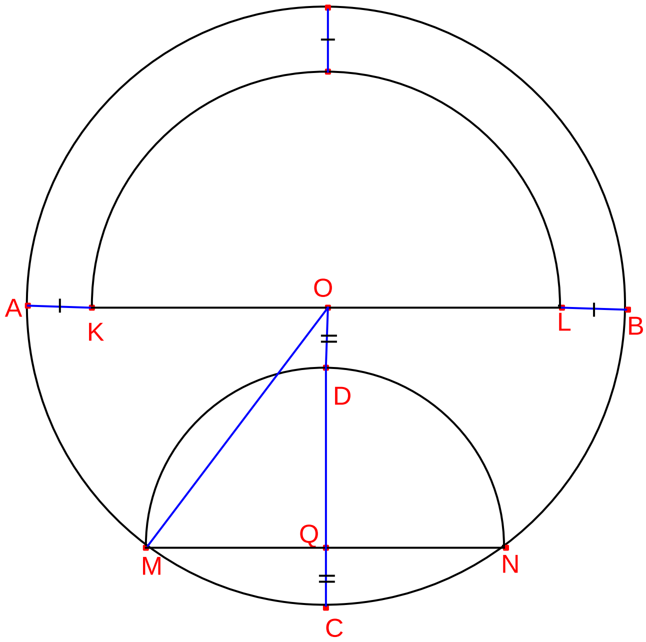
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}(r^2 + s^2)}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{16}{25}R^2 + \frac{9}{25}R^2\right)}{R^2} = \frac{1}{2}$$

2958.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior quan x s'aproxima cap a infinit.



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga $\overline{AK} = \overline{BL} = a$

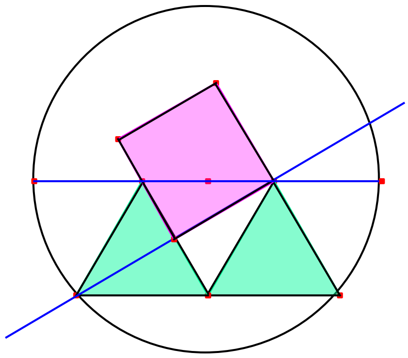
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = r = R - a$
Siga $\overline{CQ} = \overline{OD} = x$
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QM} = s = R - 2x$
$s = R - 2x, \overline{OQ} = R - x, \overline{OM} = R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQO}$:
$R^2 = (R - x)^2 + (R - 2x)^2$
Resolent l'equació:
$R = 5x$
$s = 3x$

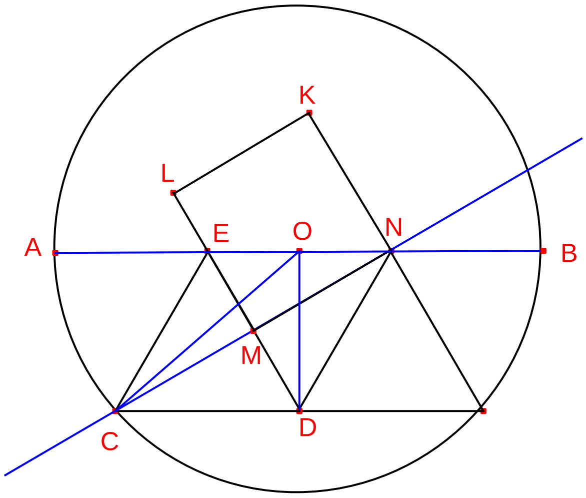
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}(r^2 + s^2)}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}((5x - a)^2 + (3x)^2)}{(5x)^2} = \frac{34x^2 - 10ax + a^2}{50x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{34x^2 - 10ax + a^2}{50x^2} = \frac{17}{25}$$

2959.- En la circumferència, de la figura, s'han dibuixat dos triangles iguals que tenen dos vèrtex sobre un diàmetre.
Si l'àrea de la circumferència és 84π calculeu l'àrea del quadrat morat.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
L'àrea és 84π
Aleshores, $R^2 = 84$



Siga el triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ de costat $\overline{CD} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$
Siga el quadrat $KLMN$.

$$\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

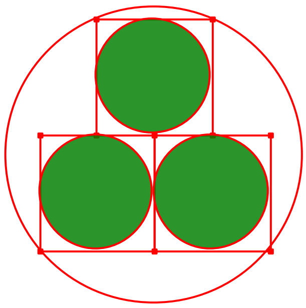
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDO}$

$$R^2 = c^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$$

$c^2 = 48$
L'àrea del rectangle $KLMN$ és:

$$S_{KLMN} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 = \frac{3}{4}c^2 = 36$$

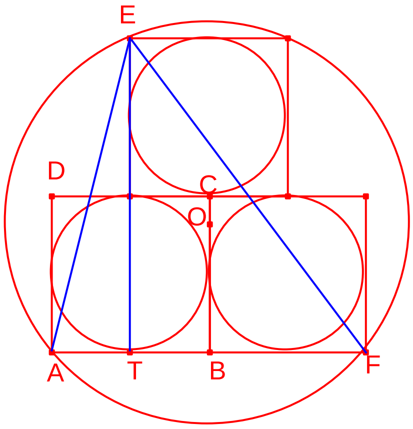
2960.- Els tres quadrats de la figura són iguals i tenen quatre vèrtexs en una circumferència exterior.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada (suma dels tres cercles inscrits en els tres quadrats) i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
El radi de les circumferències inscrites al quadrat és:

$$r = \frac{1}{2}c$$

Siga $\alpha = \angle EAF$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATE}$

$$\overline{AE} = \frac{\sqrt{17}}{2}c$$

$$\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTE}$

$$\overline{BE} = \frac{5}{2}c$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$ està inscrit en la circumferència exterior.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFE}$:

$$\frac{\frac{5}{2}c}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{\frac{5}{2}c}{\frac{4\sqrt{17}}{17}} = 2R$$

Simplificant:

$$c = \frac{16\sqrt{17}}{85}R$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{3cercles}}{S_O} = \frac{3\cdot\pi\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{\pi R^2} = \frac{3\left(\frac{8\sqrt{17}}{85}R\right)^2}{R^2} = \frac{192}{425}$$