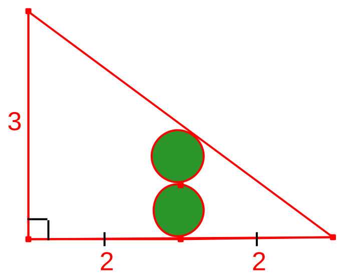
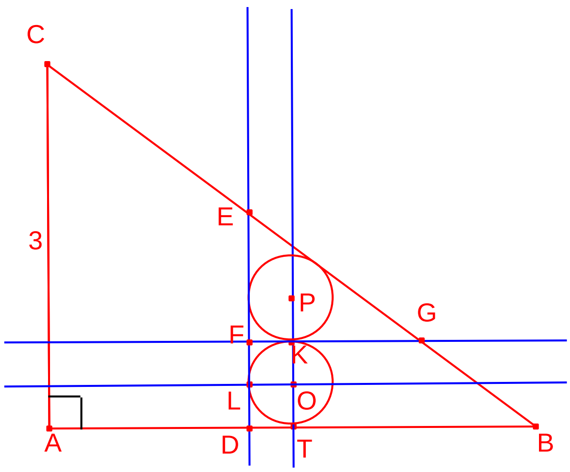
2961.- Els catets dels triangle rectangle de la figura, són 3, 4.
Calculeu el radi de les dues circumferències iguals.




Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 4, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 5$
Siga $T$ el punt mig del catet $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $\overline{OT} = r$
Siga la circumferència de centre $P$ i radi $\overline{PK} = r$
Pel centre $O$ tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla la circumferència de centre $O$ en el punt $L$.
Pel punt $L$ tracem una perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla el triangle en els punts $D, E$.
Pel punt $K$ tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla la recta $DE$ en el punt $F$ i la hipotenusa en el punt $G$.




Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFG}$
$\overline{DB} = 2 + r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EDB}, \overset{\Delta}{CAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{DE} = \frac{3}{4}(2 + r)$$

$$\overline{EF} = \frac{3}{4}(2 + r) - 2r = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}r$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{CAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{FG} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}r\right) = 2 - \frac{5}{3}r, \overline{EG} = \frac{5}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}r\right) = \frac{5}{2} + \frac{25}{12}r$$

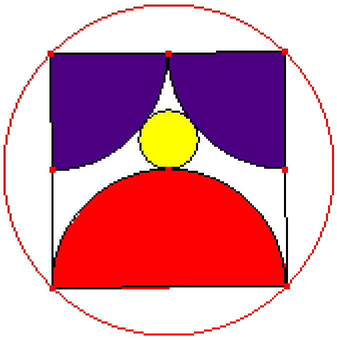
El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{EFG}$ és:

$$r = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}r\right) + \left(2 - \frac{5}{3}r\right) - \left(\frac{5}{2} + \frac{25}{12}r\right)}{2}$$

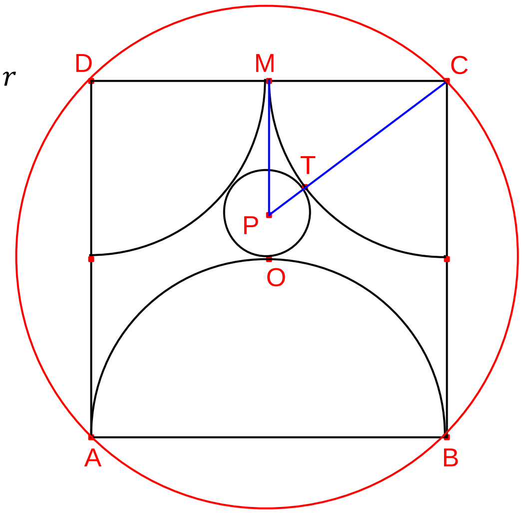
Resolent l'equació:

$$r = \frac{6}{17}$$

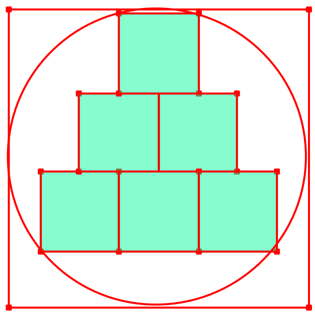
2962.- En una circumferència s'ha inscrit un quadrat.
En el quadrat s'ha dibuixat dos quadrants iguals i una semicircumferència.
Una circumferència és tangent als dos quadrants i al semicercle.
Calculeu la proporció entre les àrees del cercle groc i el cercle exterior



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre $O$ i costat $\overline{AB} = 2R$
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{CD}$
El radi de la circumferència exterior és $\overline{OA} = R\sqrt{2}$
Siga la circumferència de centre $P$ i radi $\overline{PO} = \overline{PT} = r$
$\overline{PC} = r + R, \overline{PM} = R - r, \overline{CM} = R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMC}$:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2$
Simplificant:
$4Rr = R^2$
Resolent l'equació:
$r = \frac{1}{4}R$
La proporció entre les àrees és:
$\frac{S_P}{S_O} = \frac{r^2}{\left(R\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32}$

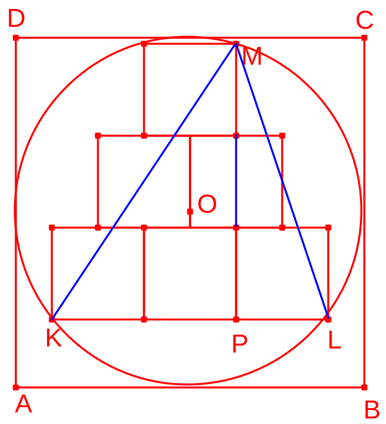


2963.- Sis quadrats iguals estan dins d'una circumferència.
La circumferència està inscrita en un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.

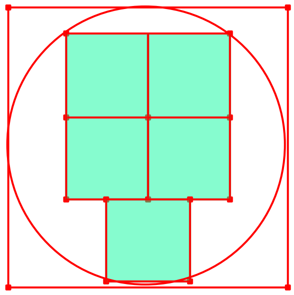


Solució:
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $\overline{OK} = R$
Siga el quadrat $ABCD$ circumscrit a la circumferència de costat $\overline{AB} = 2R$
Siga el quadrat de costat $\overline{PL} = c$
$\overline{KP} = 2c, \overline{MP} = 3c$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{KPM}, \overset{\Delta}{MPL}$:
$\overline{KM} = c\sqrt{13}, \overline{LM} = c\sqrt{10}$
Siga $\alpha = \angle MKL$
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$
El triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ està inscrit en la circumferència.
Aplicant el teorema dels sinus:
$$\frac{c\sqrt{10}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = 2R$$
$$2R = \frac{\sqrt{130}}{3}c$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{6\cdot c^2}{(2R)^2} = \frac{6\cdot c^2}{\frac{130}{9}c^2} = \frac{27}{65}$$



2964.- Cinc quadrats iguals estan dins d'una circumferència.
La circumferència està inscrita en un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $\overline{OK} = R$
Siga el quadrat $ABCD$ circumscrit a la circumferència de costat $\overline{AB} = 2R$
Siga el quadrat de costat $\overline{LQ} = c$

$\overline{LP} = \frac{1}{2}c, \overline{MP} = 3c, \overline{KP} = \frac{3}{2}C$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{KPM}, \overset{\Delta}{MPL}$:

$\overline{KM} = c\frac{3\sqrt{5}}{2}, \overline{LM} = c\frac{\sqrt{37}}{2}$

Siga $\alpha = \angle MKL$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

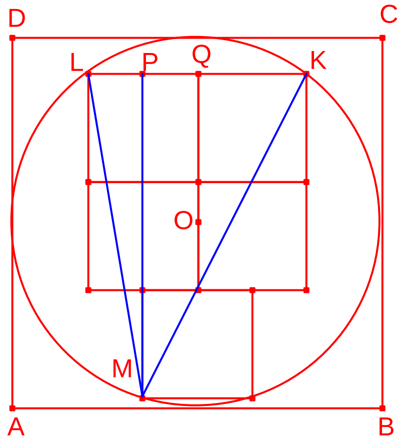
El triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ està inscrit en la circumferència.
Aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{c\frac{\sqrt{37}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 2R$$

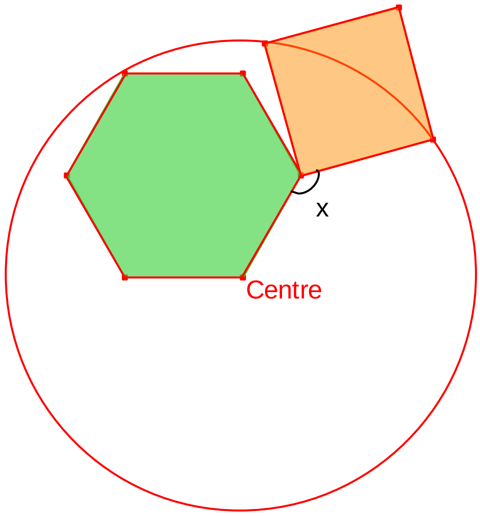
$$2R = \frac{\sqrt{185}}{4}c$$

La proporció entre les àrees és:

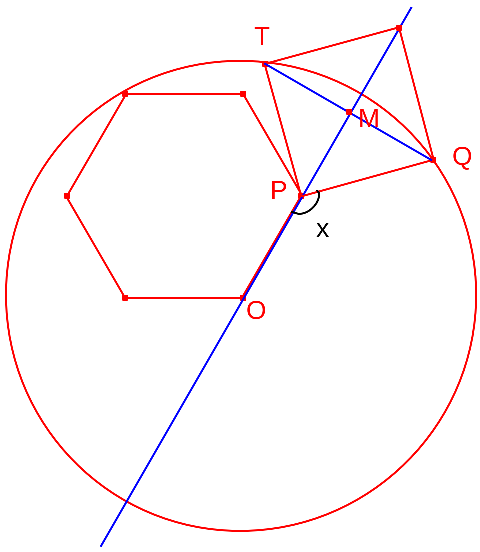
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{6 \cdot c^2}{(2R)^2} = \frac{6 \cdot c^2}{\frac{185}{16}c^2} = \frac{96}{185}$$



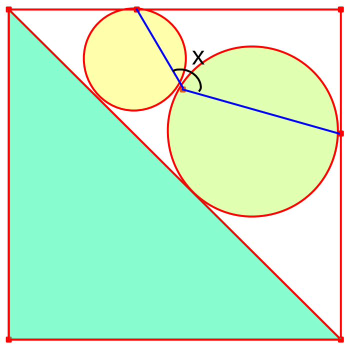
2965.- En la figura, un vèrtex de l'hexàgon regular és el centre de la circumferència.
Calculeu la mesura de l'angle x que forma el costat de l'hexàgon i el costat del quadrat.



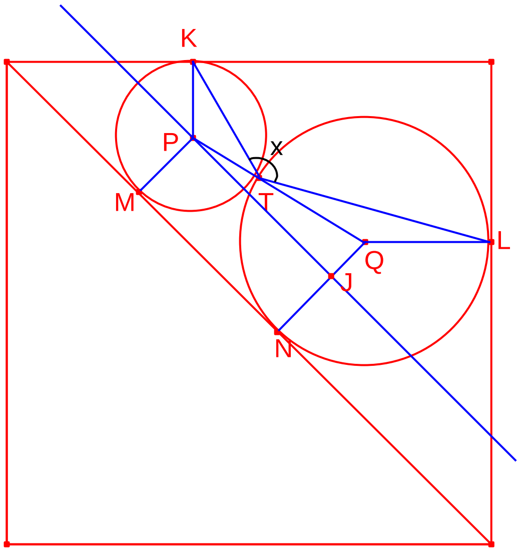

Solució:
Siga la circumferència de centre $O$.
Siga $\angle OPQ = x$
La mediatriu de la corda $\overline{QT}$ passa pel centre $O$ de la circumferència.
Siga $M$ el punt mig de la corda $\overline{QT}$
Els punts $O, P, M$ estan alineats.
$x = 180° - \angle MPQ = 135°$



2966.- En el quadrat de la figura s'han dibuixat dues circumferències tangents i tangents a la diagonal i als costats.
Calculeu la mesura del l'angle $x$

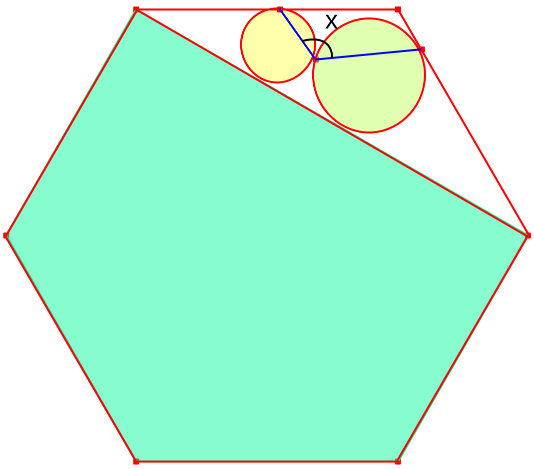



Solució:
Siga $\angle KLT = \angle QTL = \alpha$
Siga $\angle PKT = \angle PTK = \beta$

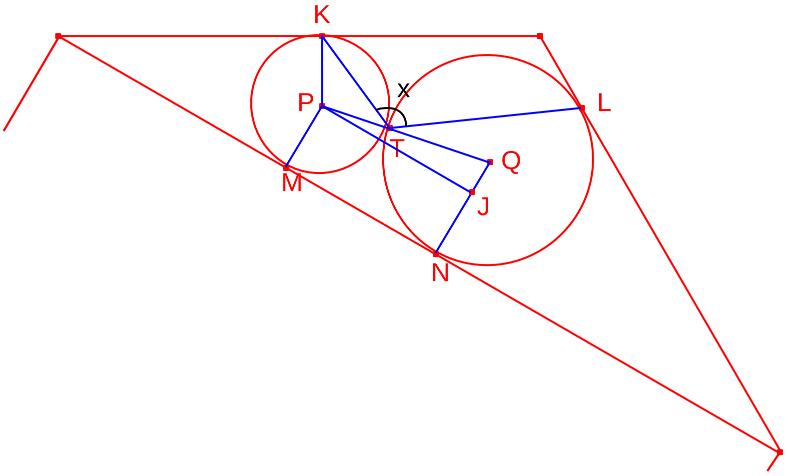



Siga $J$ la projecció de $P$ sobre $QN$.
Siga $\gamma = \angle QPJ$
$\angle MPK = 135°, \angle NQL = 135°$
$180° - 2\beta + 135° + 90° + \gamma = 360°$
$180° - 2\alpha + 135° + 90° - \gamma = 360°$
Sumant ambdues expressions:
$\alpha + \beta = 45°$
Aleshores, $x = 135°$

2967.- En l'hexàgon regular de la figura s'han dibuixat dues circumferències tangents i tangents a la diagonal i als costats.
Calculeu la mesura del l'angle $x$

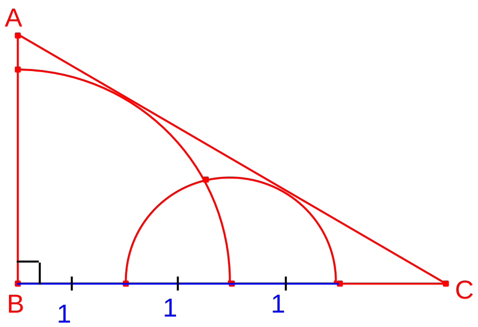



Solució:
Siga $\angle KLT = \angle QTL = \alpha$
Siga $\angle PKT = \angle PTK = \beta$

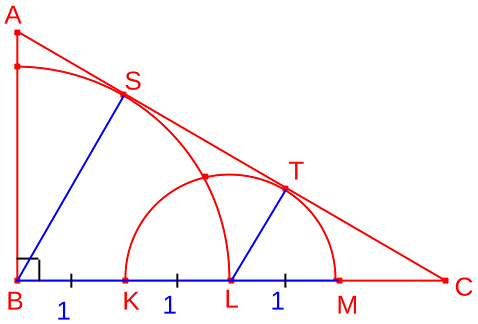



Siga J la projecció de P sobre QN.
Siga $\gamma = \angle QPJ$
$\angle MPK = 150°, \angle NQL = 150°$
$180° - 2\beta + 150° + 90° + \gamma = 360°$
$180° - 2\alpha + 150° + 90° - \gamma = 360°$
Sumant ambdues expressions:
$\alpha + \beta = 60°$
Aleshores, $x = 120°$

2968.- Calculeu l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ on hi ha dibuixats un quadrant i un semicercle.



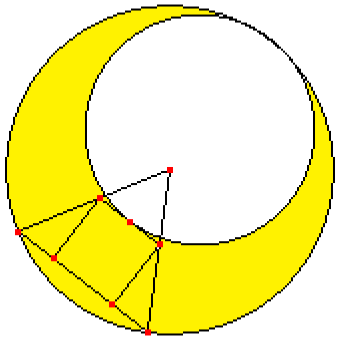

Solució:
Siga el quadrant de centre B i radi $\overline{BL} = \overline{BS} = 2$
Siga el semicercle de centre L i radi $\overline{LM} = \overline{LT} = 1$
Siga $\overline{CM} = a$




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BSC}, \overset{\Delta}{LTC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1}{2} = \frac{1+a}{3+a}$$
Resolent l'equació $a = 1$
$$\frac{\overline{LT}}{\overline{LC}} = \frac{1}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LTC}$:
$$\overline{TC} = \sqrt{3}$$

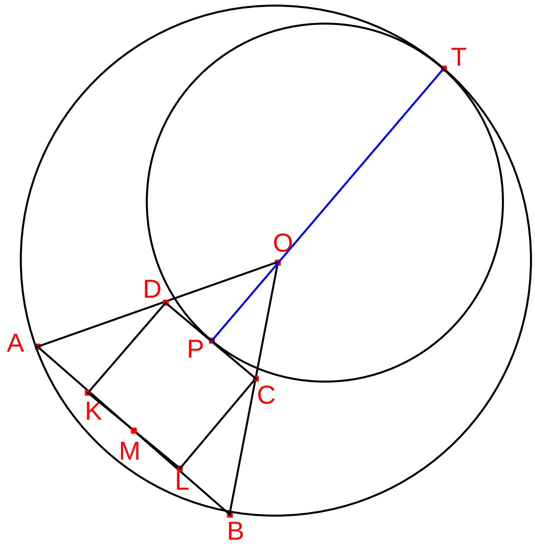
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{LTC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{AB} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

2969.- En la figura s'ha dibuixat un triangle equilàter, un quadrat inscrit i dues circumferències tangents interiors. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABO}$ de costat $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.
Siga el quadrat $KLCD$ de costat $\overline{KL} = c$




$$\overline{AK} = \overline{BL} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$\overline{AB} = R = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)c$$

Resolent l'equació:

$$c = \left(2\sqrt{3} - 3\right)R$$

Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}R - c = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}R$$

$$\overline{TP} = R + \overline{OP} = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{2}R$$

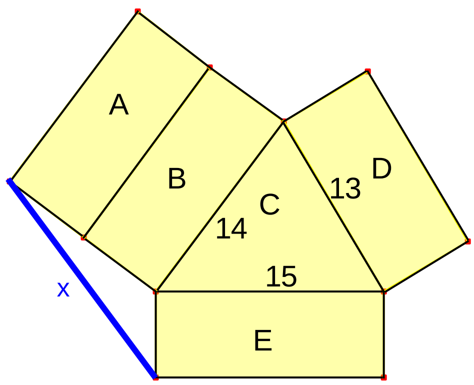
El radi de la circumferència tangent interior és:

$$\frac{\overline{TP}}{2} = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{4}R$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{1 - \left(\frac{8 - 3\sqrt{3}}{4}\right)^2}{1} = \frac{-75 + 48\sqrt{3}}{16} \approx 0.5087$$

2870.- Els quatre rectangle i el triangle de la figura, tenen la mateixa àrea.
Calculeu la mesura del segment $x$




Solució:

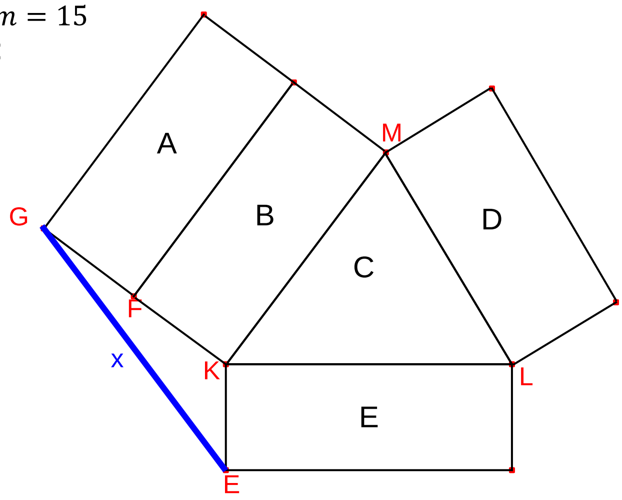
Siga el triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ de costats, $k = 13, l = 14, m = 15$
Aplicant la fórmula d'Heró, l'àrea del triangle és:

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}}{4} = 84$$

Els rectangles $A, B$ tenen àrea 84, aleshores:

$$\overline{KF} = \overline{FG} = \frac{84}{14} = 6$$

$$\overline{KG} = 12$$




El rectangle $E$ té àrea 84, aleshores:

$$\overline{KE} = \frac{85}{15} = \frac{28}{5}$$

Siga $\alpha = \angle LKM$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$$\cos\alpha = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KEG}$:

$$x^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2 + 12^2 - 2 \cdot \frac{28}{5} \cdot 12 \cdot \cos(180° - \alpha)$$

$$x^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2 + 12^2 + 2 \cdot \frac{28}{5} \cdot 12 \cdot \frac{3}{5}$$

Resolent l'equació:

$$x = 16$$