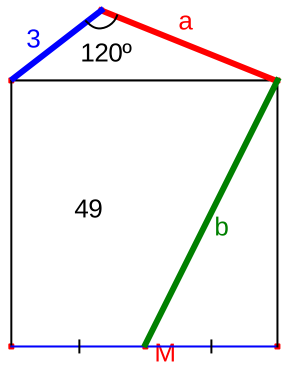
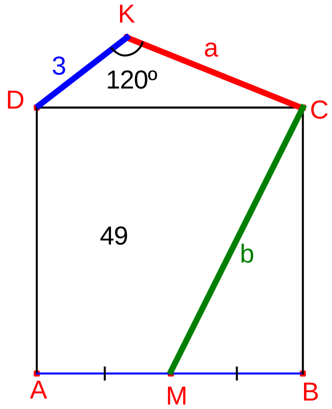
2971.- Donats el quadrat d'àrea 49 i el triangle $K = 120°$ i costat 3 de la figura, calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



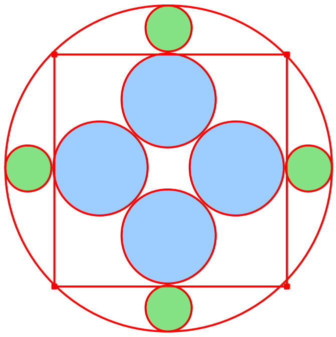
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \sqrt{49} = 7$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBC}$:
$b = \frac{7}{2}\sqrt{5}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DCK}$:
$49 = a^2 + 9 + 3a$
Resolent l'equació:
$a = 5$
La proporció és:
$\frac{a}{b} = \frac{5}{\frac{7}{2}\sqrt{5}} = \frac{2}{7}\sqrt{5}$



2972.- Determineu la proporció entre la suma de les àrees blaves i la suma de les àrees verdes.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Siga la circumferència de centre P i radi $R = \overline{PT}$

$\overline{OP} = R\sqrt{2}$

$\overline{AB} = 2R + 2 \cdot \overline{OP} = 2\left(1+\sqrt{2}\right)R$

$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} = 2\left(2+\sqrt{2}\right)R$

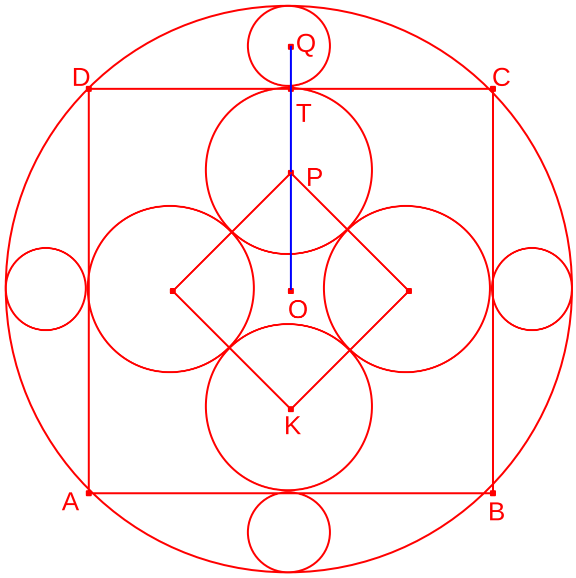
Siga $s = \overline{QT}$ radi de les circumferències verdes.

$2s = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} = R$

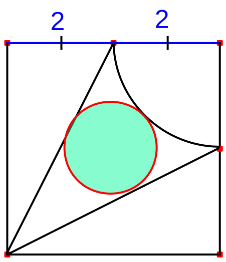
$s = \frac{1}{2}R$

La proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda:

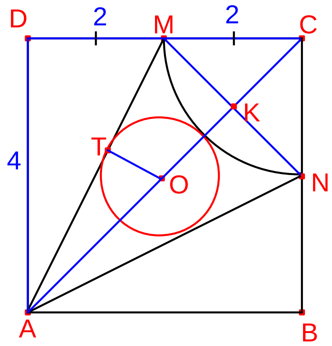
$$\frac{S_{blava}}{S_{verda}} = \frac{4 \cdot \pi R^2}{4 \cdot \pi s^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$



2973.- El quadrat de la figura té costat 4.
Calculeu el radi del cercle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Sigen M, N els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga K el punt mig del segment $\overline{MN}$.
$\overline{KM} = \sqrt{2}$, $\overline{AM} = \sqrt{5}$, $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = r$



$\overline{OA} = 4\sqrt{2} - 2 - r$

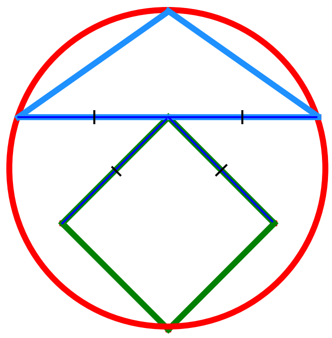
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATO}, \overset{\Delta}{AKM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 2 - r}{2\sqrt{5}}$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{2}{9}\left(1 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{10}\right)$$

2974.- En la figura, el costat desigual del triangle isòsceles és igual al doble del costat del quadrat. Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del triangle.



Solució 1:

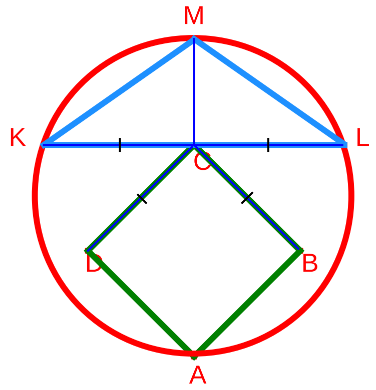
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = x$

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat desigual $\overline{KL} = 2x$ i altura $\overline{CM}$.

$\overline{AC} = x\sqrt{2}, \overline{AL} = x\sqrt{3}$

Siga $\alpha = \angle KLA$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AKL}$

$$\frac{x\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \overline{AM}$$

$$\overline{AM} = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$$

$$\overline{CM} = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLM}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}\cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \sqrt{2}$$

Solució 2:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{AC} = \sqrt{2}$

Aplicant la potència de C respecte de la circumferència:

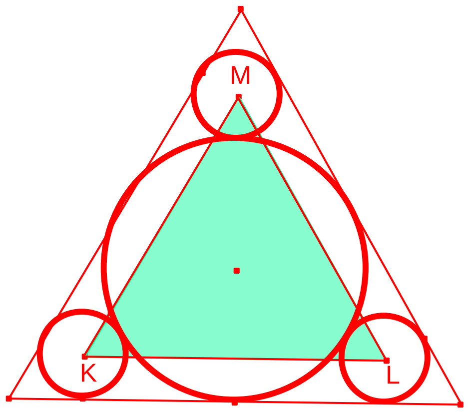
$\overline{CM} \cdot \sqrt{2} = 1 \cdot 1$

$$\overline{CM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLM}} = \frac{1^2}{\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

2975.- Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle equilàter ombrejat que té els vèrtexs en les tres circumferències menudes i el triangle equilàter exterior.



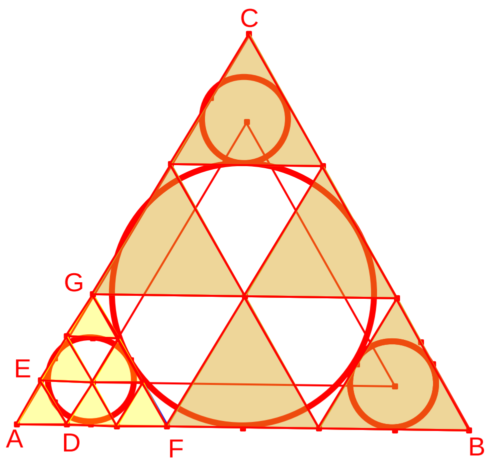
Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

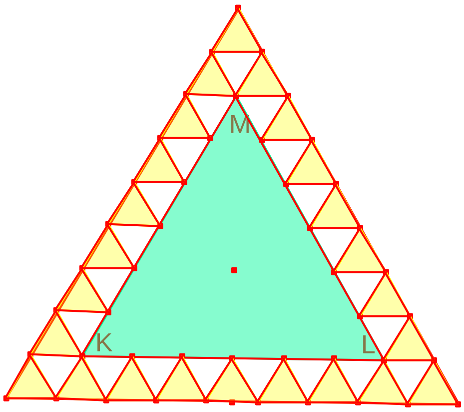
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AFG}$ que té per circumferència inscrita una de les tres menudes.

El triangle $\overset{\Delta}{AFG}$ queda dividit en 9 triangle equilàters $\overset{\Delta}{ADE}$

$S_{ABC} = 9 \cdot S_{AFG} = 81 \cdot S_{ADE}$



Dibuixem triangles de la forma $\overset{\Delta}{ADE}$ sobre l'exterior del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.



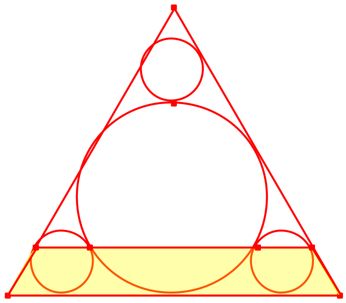
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$S_{KLM} = S_{ABC} - (17 + 15 + 13)S_{ADE} = 36 \cdot S_{ADE}$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \frac{36 \cdot S_{ADE}}{81 \cdot S_{ADE}} = \frac{4}{9}$$

2976.- Calculeu la proporció entre l'àrea del trapezi ombrejat, que té els punts de tangència de les tres circumferències en un dels costats paral·lels, i el triangle equilàter exterior.



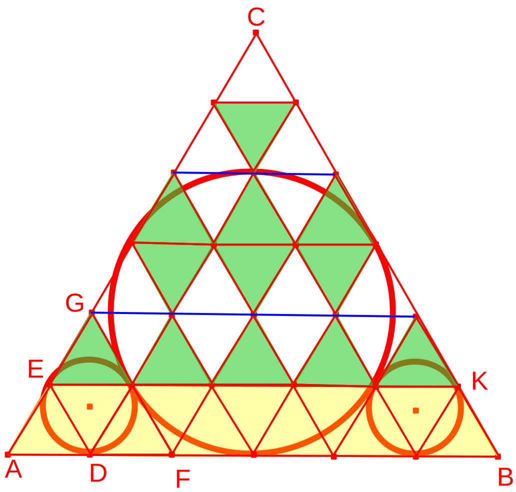
Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AFG}$ que té per circumferència inscrita una de les tres menudes.

El triangle $\overset{\Delta}{AFG}$ queda dividit en 4 triangle equilàters $\overset{\Delta}{ADE}$ (D, E, els punts migs dels segments $\overline{AF}, \overline{AG}$, respectivament)

$S_{ABC} = 9 \cdot S_{AFG} = 36 \cdot S_{ADE}$



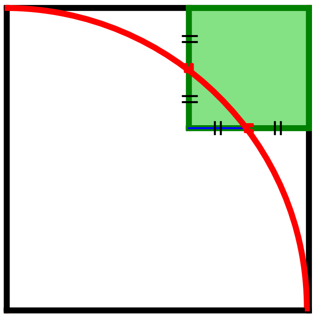
L'àrea del trapezi $ABKE$ és:

$S_{ABKE} = 11 \cdot S_{ADE}$

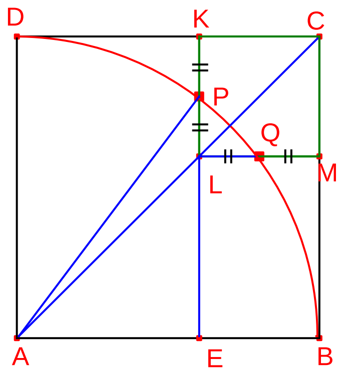
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ABKE}}{S_{ABC}} = \frac{11 \cdot S_{ADE}}{36 \cdot S_{ADE}} = \frac{11}{36}$$

2977.- Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat ombrejat i l'àrea del quadrat exterior.

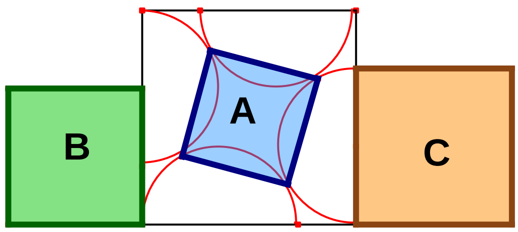


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $CKLM$ de costat $\overline{LM} = 2x$.
Siga E la projecció de L sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{AE} = \overline{LE} = 1 - 2x$
$\overline{AP} = 1$
$\overline{PE} = 1 - x$

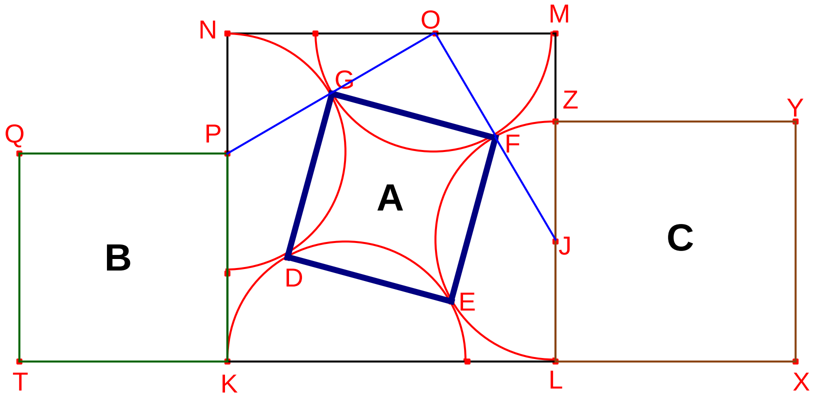


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEP}$:
$1 = (1 - x)^2 + (1 - 2x)^2$
Simplificant:
$5x^2 - 6x + 1 = 0$
Resolent l'equació:
$x = \dfrac{1}{5}$
La proporció de les àrees és:
$\dfrac{S_{CKLM}}{S_{ABCD}} = \dfrac{(2x)^2}{1^2} = \dfrac{4}{25}$

2978.- A la figura, hi ha quatre quadrats i quatre semicercles iguals.
Calculeu la proporció de les àrees $A: B: C$



Solució:



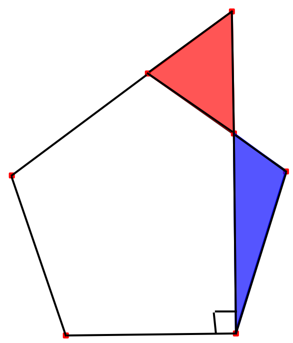
Siga el quadrat $KLMN$.
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OM} = R$
Siga el quadrat $DEFG$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ONP}, \overset{\Delta}{JMO}$ són iguals.
Aleshores, $\angle GOF = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GOF}$
$\overline{GF} = R\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONP}$
$\overline{OM} = \overline{KP} = R\sqrt{3}$
$\overline{LZ} = 2R$
Els àrees dels quadrats $A: B: C$ són:
$A = S_{DEFG} = 2R^2, B = S_{KPQT} = 3R^2, C = S_{LXYZ} = 4R^2$
Aleshores, $A: B: C = 2: 3: 4$

2979.- En la figura, el pentàgon és regular.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles ombrejats



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{BD} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

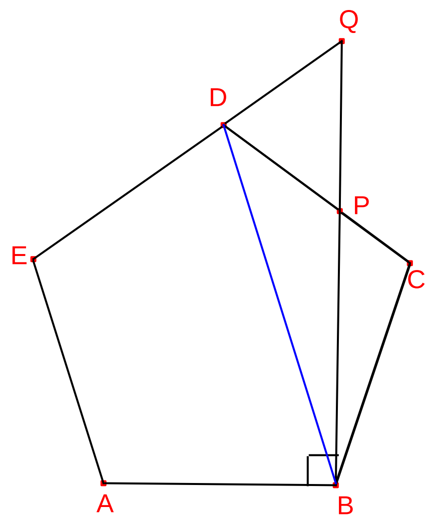
$\angle BCP = 108°, \angle BDQ = 108°$

$\angle PBC = 18°$

$\angle BPC = \angle DPQ = 54°$

$\angle PDQ = 72°, \angle PQD = 54°$

Aleshores, $\overline{PD} = \overline{QD}$



Els triangles $\overset{\Delta}{BCP}, \overset{\Delta}{BDQ}$ són semblants i de raó $\overline{BC} = \overline{BD} = 1 : \Phi$

Siga $x = \overline{CP}, \overline{PD} = x \cdot \Phi$

$1 = (1 + \Phi)x = \Phi^2 x$

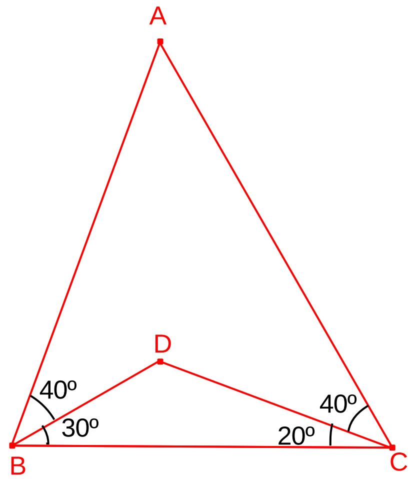
$x = \frac{1}{\Phi^2}$

$S_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot sin\ 108° = \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi^2} \sin 108°$

$S_{PDQ} = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot x \cdot \Phi \cdot x \cdot sin\ 72° = \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi^2} \sin 108°$

Les àrees dels dos triangles és la mateixa.

2980.- En la figura, $\angle ABD = 40°$,
$\angle DBC = 30°, \angle BCD = 20°, \angle DCA = 40°$.
Calculeu:
$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$



Solució:
$\angle BAC = 50°, \angle ADC = 130°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°} = \frac{\overline{BC}}{\sin 50°}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$$\frac{\overline{CD}}{\sin 30°} = \frac{\overline{BC}}{\sin 130°}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = 1$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \sqrt{3}$$