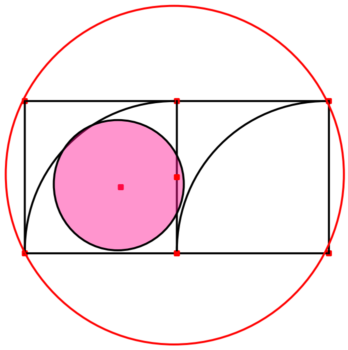
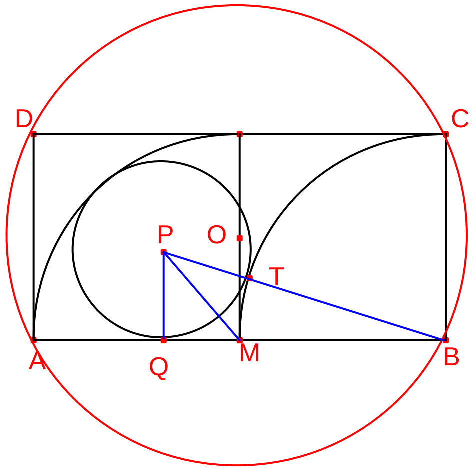
2981.- En dos quadrants iguals s'ha dibuixat una circumferència tangent.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



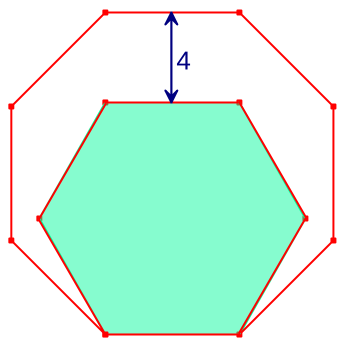
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AD} = c, \overline{AB} = 2c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga la circumferència exterior de centre O i diàmetre $2R = c\sqrt{5}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PT} = s$



$\overline{PB} = c + s, \overline{PM} = c - s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQB}$:
$(c + s)^2 = (c + x)^2 + s^2$
Simplificant:
$2cs = x^2 + 2cx$

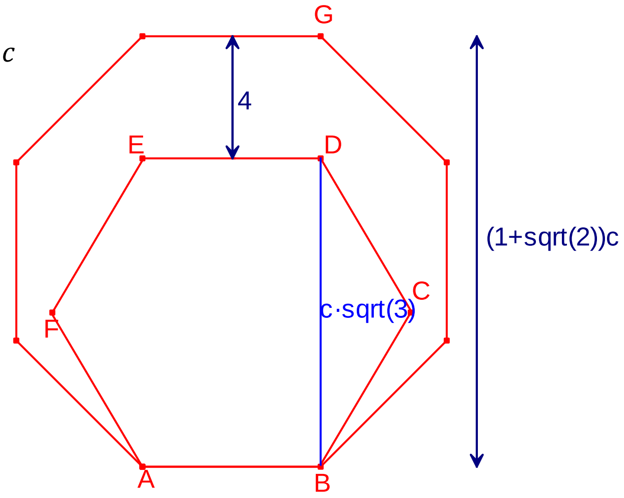
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQM}$:
$(c - s)^2 = x^2 + s^2$
Simplificant:
$x^2 = c^2 - 2cs$
Aleshores:
$2cs = c^2 - 2cs + 2cx$
Simplificant:
$$x = \frac{4s - c}{2}$$
$$\left(\frac{4s - c}{2}\right)^2 = c^2 - 2cs$$
Simplificant:
$$s^2 = \frac{3}{16}c^2$$
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{s^2}{R^2} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{20}$$

2982.- La distància entre dos costats de l'octògon regular i de l'hexàgon regular és 4.
Calculeu l'àrea de l'hexàgon regular.

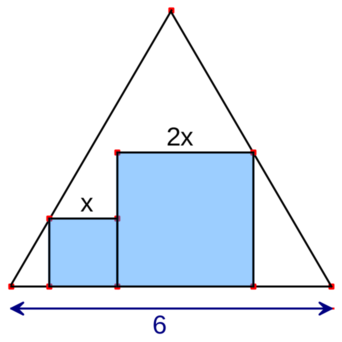


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AD} = c\sqrt{3}$
$\overline{AG} = (1+\sqrt{2})c$

$(1+\sqrt{2})c = 4 + c\sqrt{3}$
$c^2 = \dfrac{8}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}} = 4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+3)$
L'àrea de l'hexàgon regular és:
$S_{ABCDEF} = 6\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 6(3+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$
≈ 89.3297



2983.- Donat un triangle equilàter de costat 6, san dibuixat en l'interior dos quadrats de costats $x, 2x$, respectivament.
Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats.

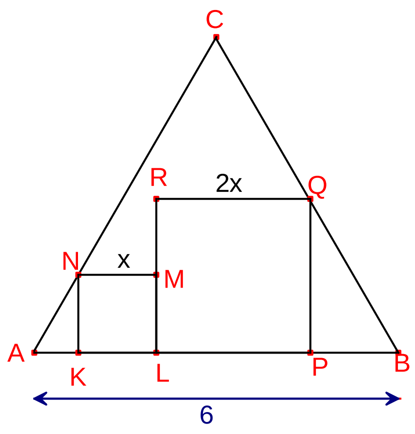


Solució:

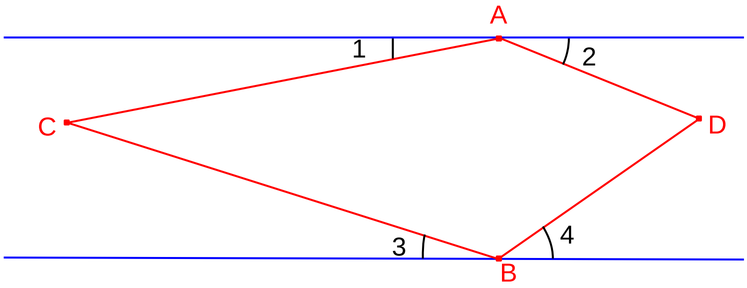
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = x$
Siga el quadrat $LPQR$ de costat $\overline{LP} = 2x$
$\overline{AK} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \overline{BP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$

$\overline{AB} = 2x + x\sqrt{3} = 6$
Resolent l'equació:
$x = 3 - \sqrt{3}$
$x^2 = 6\left(2 - \sqrt{3}\right)$

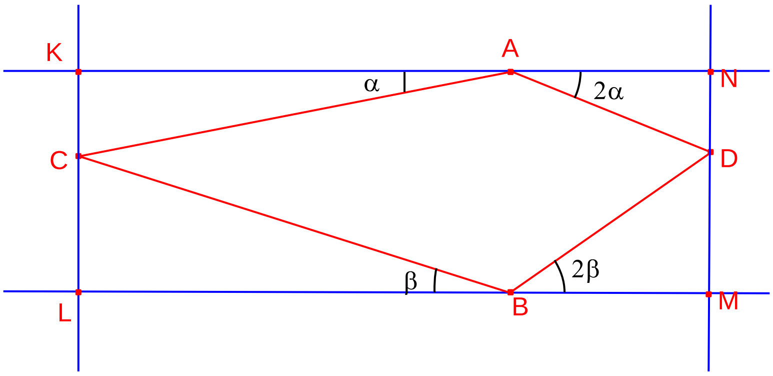
La suma de les àrees dels dos quadrats és:
$S = x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 30\left(2 - \sqrt{3}\right) \approx 8.9385$



2984.- Donades dues rectes paral·leles s'ha dibuixat el quadrilàter $ACBD$ tal que els angles del dibuix compleixen: $\hat{2} = 2 \cdot \hat{1}, \hat{4} = 2 \cdot \hat{3}$. Calculeu la proporció entre els angles $\frac{\hat{D}}{\hat{C}}$



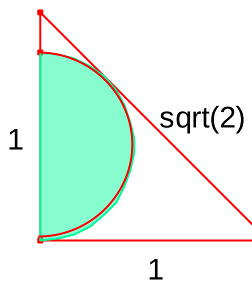
Solució:



Pels punts C, D es tracen rectes perpendiculars a les paral·leles que formen el rectangle $KLMN$.
Siga $\angle CAK = \alpha, \angle DAN = 2\alpha$
Siga $\angle CBL = \beta, \angle DBM = 2\beta$

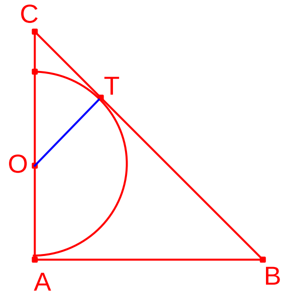
$\hat{C} = 180° - (90° - \alpha + 90° - \beta) = \alpha + \beta$
$\hat{D} = 180° - (90° - 2\alpha + 90° - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta$
$\frac{\hat{D}}{\hat{C}} = 2$

2985.- Els costats del triangle són $1, 1, \sqrt{2}$
Calculeu el radi del semicercle.



Solució 1:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = \sqrt{2}, b = c = 1$ és rectangle, $A = 90°$
Siga O el centre el semicercle de radi $\overline{OT} = r$
$\overline{CT} = r, \overline{BT} = \overline{BA} = 1$
$1 + r = \sqrt{2}$
$r = \sqrt{2} - 1$



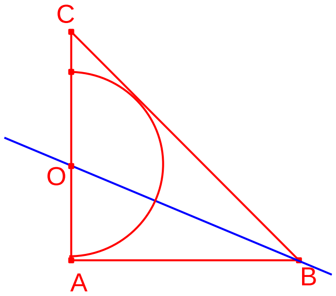
Solució 2:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = \sqrt{2}, b = c = 1$ és rectangle, $A = 90°$
La bisectriu de l'angle B talla el catet $\overline{AC}$ en el centre de la semicircumferència O.
Siga $\overline{OA} = r$ radi de la semicircumferència.
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1 - r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$r = \sqrt{2} - 1$

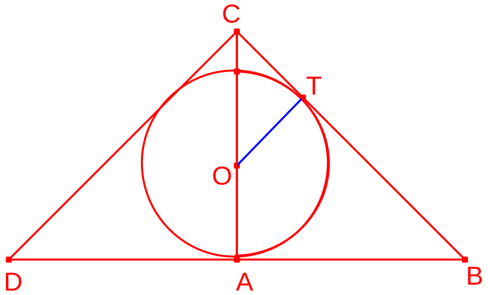


Solució 3:

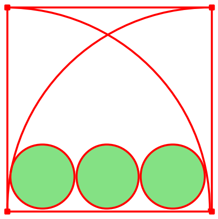
El triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = \sqrt{2}, b = c = 1$ és rectangle, $A = 90°$
Siga D el simètric de B respecte del catet $\overline{AC}$.
Siga O el centre el semicercle de radi $\overline{OT} = r$
La circumferència de centre O i $\overline{OT} = r$ està inscrita en el triangle $\overset{\Delta}{DBC}$
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DBC}$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} r$$

Resolent l'equació:
$r = \sqrt{2} - 1$

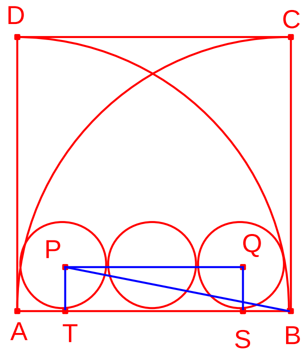


2986.- En un quadrat de costat 1 s'han dibuixat dos quadrants amb centres els dos vèrtexs i tres circumferències iguals tangents al costat del quadrat.



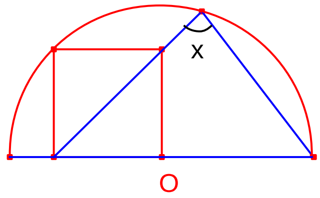
Calculeu el radi de les circumferències.

Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QS} = r$

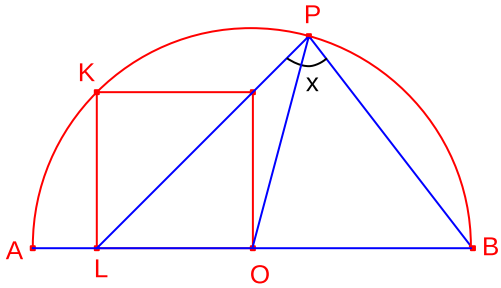


$$\overline{PQ} = 4r, \overline{AT} = \overline{BS} = \frac{1-4r}{2}$$
$$\overline{BT} = 4r + \frac{1-4r}{2} = \frac{1+4r}{2}, \overline{BP} = 1 - r$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $B\overset{\Delta}{T}P$:
$$(1-r)^2 = r^2 + \left(\frac{1+4r}{2}\right)^2$$
Simplificant:
$$16r^2 + 16r - 3 = 0$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{-2+\sqrt{7}}{4}$$

2987.- Donat una semicircumferència s'ha dibuixat sobre el diàmetre un quadrat que té un vèrtex en el centre.
Calculeu la mesura de l'angle x

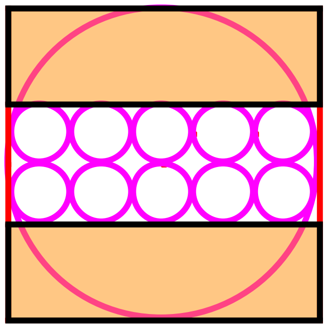


Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OK} = \overline{OP} = 1$
El costat del quadrat és $\overline{OL} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\angle PLO = 45°$
Siga $\alpha = \angle LPO$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{LOP}$:



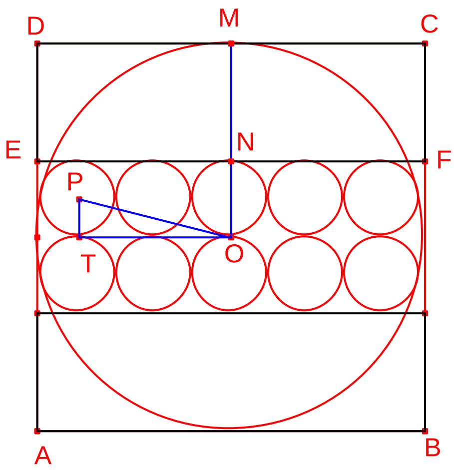
$$\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \alpha}$$
$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 30°$$
$$\angle POB = 45° + 30° = 75°$$
$$\angle OPB = \frac{180° - 75°}{2} = \frac{105°}{2}$$
$$x = 30° + \frac{105°}{2} = \frac{165°}{2}$$

2988.- En un quadrat s'ha inscrit una circumferència i deu circumferències iguals.
El radi de les deu circumferències menudes és 1.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2R$, R radi de la circumferència inscrita al quadrat.

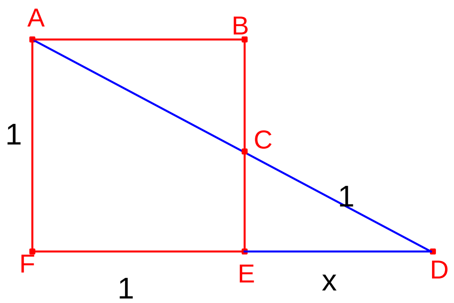


$\overline{De} = R - 2$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = 1$
$\overline{OT} = 4, \overline{OP} = R - 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$(R-1)^2 = 1^2 + 4^2 = 17$
$R = 1 + \sqrt{17}$

L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{CDEF} = 2 \cdot 2R(R-2) = 4R(R-2) =$$
$$= 4\left(1+\sqrt{17}\right)\left(-1+\sqrt{17}\right) = 64$$

2989.- En la figura, el quadrat $ABEF$ té costat 1.
$\overline{CD} = 1$
Calculeu la mesura $\overline{DE} = x$

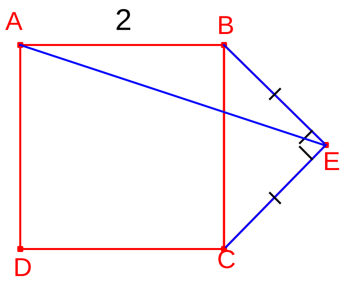


Solució:
$\overline{CE} = y, \overline{BC} = 1 - y$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEC}$:
$x^2 + y^2 = 1$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEC}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1-y}{y} = \frac{1}{x}$$
Simplificant:
$x - y = xy$
Elevant l'expressió al quadrat:
$1 - 2xy = (xy)^2$
Resolent l'equació:
$xy = \sqrt{2} - 1$
$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2} - 1 \\ x^2 + y^2 = \end{cases}$$
$x^2 - (\sqrt{2} - 1)x + 1 - \sqrt{2} = 0$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}}{2} \approx 0.8832$$

2990.- Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCE}, E = 90°$

Calculeu la mesura $\overline{AE}$



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$\overline{BE} = \sqrt{2}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{AE}^2 = 4 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

$\overline{AE} = \sqrt{10}$