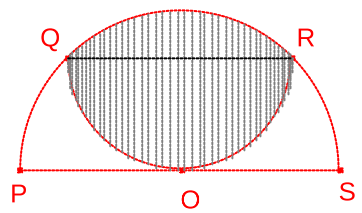
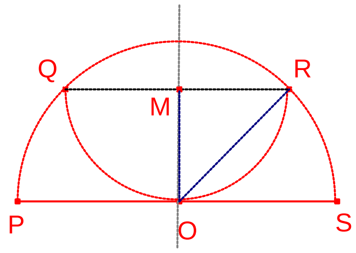
Problemes de Geometria per a l'ESO 30



291.- Els arcs AQRS, QOR tenen diàmetres $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, respectivament.
Si $\overline{PS} = 4$. Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.
UKMT intermediate Mathematical Challenge 2006 , problema 21.

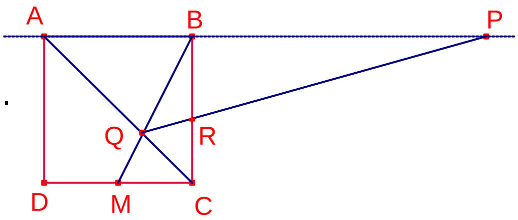
Solució:



O és el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{PS}$.
$\overline{OP} = \overline{OR} = 2$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{QR}$ que és el centre de la semicircumferència de diàmetre.
Siga $\overline{MO} = \overline{MR} = r$, el seu radi.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles rectangle $\overset{\Delta}{OMR}$:
$2r^2 = 4$.
$r^2 = 2$.
Notem que $\angle QOR = 90º$ ja que $\angle MOR = 45º$ per ser $\overset{\Delta}{OMR}$ rectangle i isòsceles.
L'àrea ombrejada està formada per un semicercle de diàmetre $\overline{QR}$ i un quart de cercle de centre O i radi $\overline{OR} = 2$, menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QOR}$.

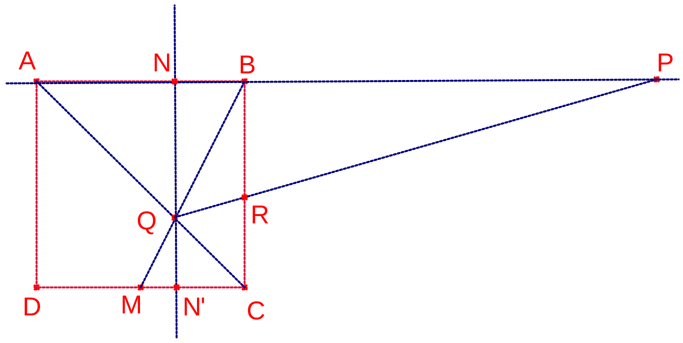
$$S_{\text{ombrejada 0}} = \frac{1}{2}\left(\pi r^2\right) + \frac{1}{4}\left(\pi 2^2\right) - \frac{2^2}{2} = 2\pi - 2.$$

292.- Siga el quadrat ABCD.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga P en la prolongació del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{BP} = 2 \cdot \overline{AB}$.
Siga Q la intersecció dels segments $\overline{AC}$, $\overline{BM}$.
El segment $\overline{PQ}$ talla el costat $\overline{BC}$ en el punt R.
Determineu la proporció $\dfrac{\overline{CR}}{\overline{BR}}$.



Posamentier. Challenging Problemes in Geometry. Problema 8.15.

Solució 1:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.
Siga N la projecció de Q sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga N' la projecció de Q sobre el costat $\overline{AB}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{AQB}$, $\overset{\Delta}{CQM}$ són semblants i la raó de semblança 2:1.
Aleshores, $\overline{NQ} = \dfrac{2}{3}c$, $\overline{N'Q} = \dfrac{1}{3}c$.



Els triangles $\overset{\Delta}{NQB}$, $\overset{\Delta}{N'QC}$ són semblants i la raó de semblança 2:1.
Aleshores, $\overline{NB} = \overline{N'C} = 2 \cdot \overline{MN'} = \dfrac{2}{3}\overline{MC} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2}c = \dfrac{1}{3}c$.

$$\frac{\overline{NQ}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NB} + \overline{BP}} = \frac{\frac{2}{3}c}{\frac{1}{3}c + 2c} = \frac{2}{7}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NQP}$, $\overset{\Delta}{BRP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\dfrac{\overline{BR}}{\overline{BP}} = \dfrac{2}{7}$, aleshores, $\overline{BR} = \dfrac{4}{7}c$.
$\overline{CR} = c - \overline{BR} = \dfrac{3}{7}c$.

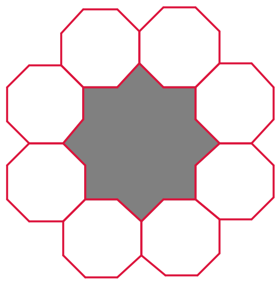
$$\frac{\overline{CR}}{\overline{BR}} = \frac{\frac{3}{7}c}{\frac{4}{7}c} = \frac{3}{4}.$$

Solució 2 (Posamentier). Utilitza el teorema de Menelau.
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.
Els triangles $\overset{\Delta}{AQB}$, $\overset{\Delta}{CQM}$ són semblants i la raó de semblança 2:1. $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} = 2$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i la transversal PRQ. Aplicant el teorema de Menelau:

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} = 1.$$

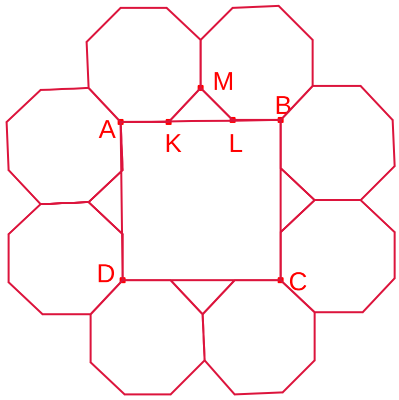
$\dfrac{\overline{CR}}{\overline{BR}} \cdot \dfrac{2c}{3c} \cdot 2 = 1$. Aleshores, $\dfrac{\overline{CR}}{\overline{BR}} = \dfrac{3}{4}$.

293.- Vuit octògons regulars estan units pels costats.
Si el costat dels octògons és 1 determineu l'àrea de l'octògon estrellat interior.
UKMT Senior 2005, problema 17.



Solució:

L'angle interior de l'octògon és 135º.
El costat dels octògons regulars és 1:
$\overline{AK} = \overline{KM} = \overline{LB} = 1$
L'àrea de l'estrella octangular està formada per l'àrea del quadrat ABCD i l'àrea de dos quadrats de costat 1.

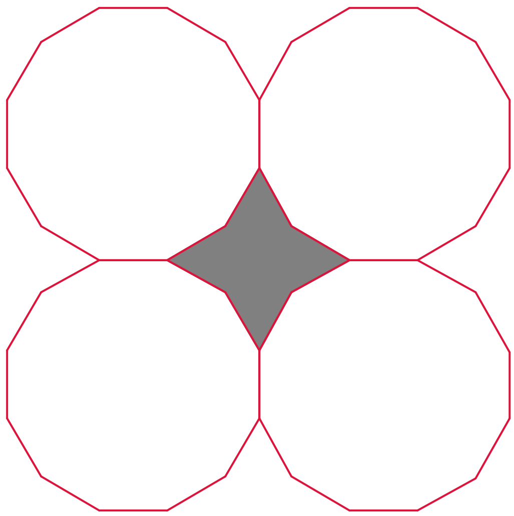


Calculem el costat del quadrat ABCD.
$\angle AML = 90^{\circ}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:
$\overline{KL} = \sqrt{2}$.
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AK} + \overline{KL} = 2 + \sqrt{2}$.

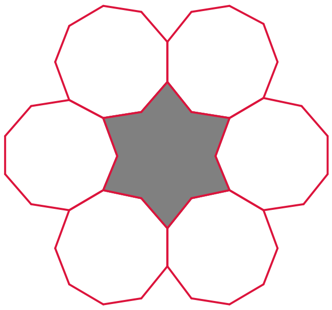
L'àrea de l'estrellal és:
$S_{estel} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 = 8 + 4\sqrt{2}$.

293b.
Quatre dodecàgons regulars estan units pels costats.
Si el costat dels dodecàgons és 1 determineu l'àrea de l'octògon estrellat interior.

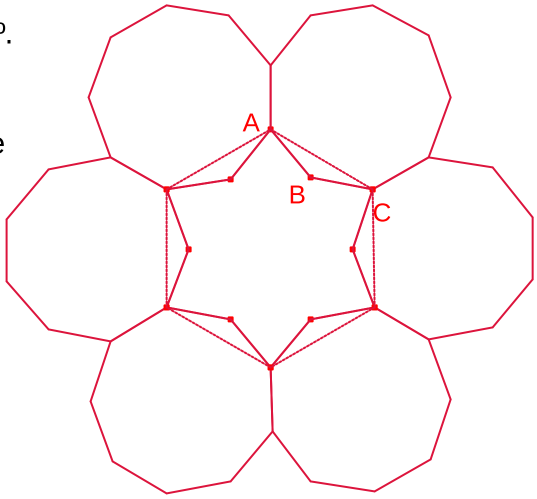


Solució:
$S_{ombrejada} = 1 + \sqrt{3}$.

294.- Sis polígons regulars de 9 costats estan units pels costats.
Si el costat dels polígons regulars és 1 determineu l'àrea del dodecàgon estrellat interior.

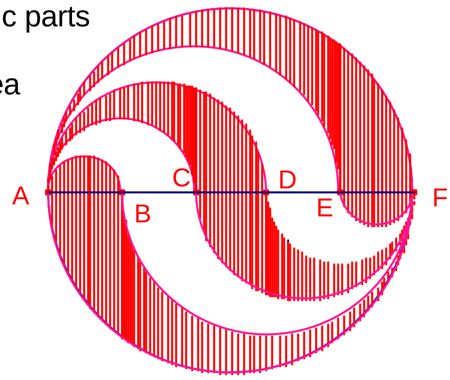


Solució:
L'angle interior del polígon regular de 9 costats és 140º.
El costat dels octògons regulars és 1:
$\overline{AB} = \overline{BC} = 1$
L'àrea del dodecàgon estrellat està format per l'àrea de l'hexàgon regular de costat $\overline{AC}$ menys l'àrea de 6 triangles iguals a $\overset{\Delta}{ABC}$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = 2 - 2\cos 140^\circ = 2 + 2\cos 40^\circ$.
L'àrea del cosinus de l'hexàgon de costat $\overline{AC}$ és:
$$S_{hexa} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AC}^2 = 3\sqrt{3}(1+\cos 40^\circ).$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{\sin 140^\circ}{2} = \frac{\sin 40^\circ}{2}.$$
L'àrea de la zona ombrejada és:
$$S_{Ombrejada} = 3\sqrt{3}(1+\cos 40^\circ) - 6\left(\frac{\sin 40^\circ}{2}\right) = 3\sqrt{3}(1+\cos 40^\circ) - 3\sin 40^\circ.$$

295.- El diàmetre $\overline{AF}$ d'una circumferència és divideix en cinc parts iguals i es dibuixen els semicercles de la figura.
Determineu la proporció entre l'àrea la zona ombrejada i l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AF}$.



Solució:
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AF}$ menys l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AE}$, més l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AD}$, menys l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AC}$, més l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AB}$.

Siga r el radi del cercle de diàmetre $\overline{AF}$.

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = \pi r^2 - \pi\left(\frac{4}{5}r\right)^2 + \pi\left(\frac{3}{5}r\right)^2 - \pi\left(\frac{2}{5}r\right)^2 + \pi\left(\frac{1}{5}r\right)^2 = \frac{3}{5}\pi \cdot r^2.$$

L'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AF}$ és:

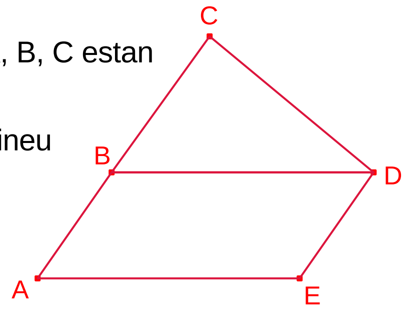
$$S_{cercle} = \pi \cdot r^2.$$

La proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{cercle}} = \frac{\frac{3}{5}\pi \cdot r^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{3}{5}.$$

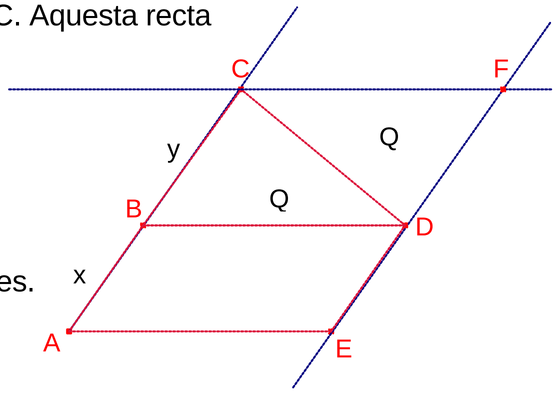
296.- En la figura ABDE és un paral·lelogram i els punts A, B, C estan alineats.

Si $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és Q, determineu l'àrea del paral·lelogram ABDE.



Solució:

Tracem la recta paral·lela al costat $\overline{AE}$ que passa per C. Aquesta recta talla la recta DE en el punt F.



Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{FCD}$ són iguals, aleshores tenen la mateixa àrea.

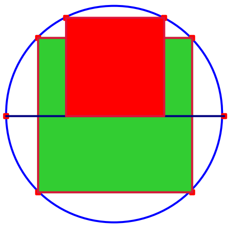
Els paral·lelograms ABDE, BDFE tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament, aleshores, les àrees són proporcionals a aquestes bases.

$$\frac{S_{ABDE}}{S_{BDFC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

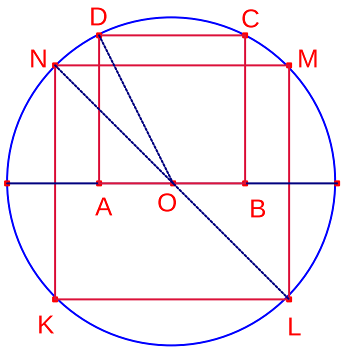
$$\frac{S_{ABDE}}{2Q} = \frac{x}{y}.$$

Aleshores, $S_{ABDE} = \dfrac{2xQ}{y}$.

297.- En un semicercle d'una circumferència s'ha inscrit un quadrat amb un dels costats en el diàmetre. Calculeu la raó entre les àrees d'aquest quadrat i el quadrat inscrit en la circumferència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.
Siga ABCD el quadrat inscrit en el semicercle.
Siga $\overline{AD} = x$ el seu costat.
$\overline{OD} = r$, $\overline{OA} = \frac{x}{2}$.

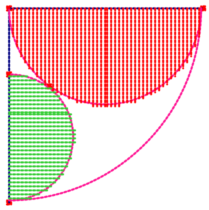


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$:
$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2$. Resolent l'equació:
$x^2 = \frac{4}{5}r^2$.
L'àrea del quadrat ABCD és:
$S_{ABCD} = x^2 = \frac{4}{5}r^2$.
Siga KLMN el quadrat inscrit en la circumferència.
Siga $\overline{KN} = y$ el seu costat.
$\overline{LN} = 2r$.

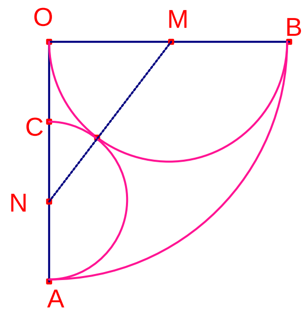
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLN}$:
$y^2 + y^2 = (2r)^2$. Resolent l'equació:
$y^2 = 2r^2$.
L'àrea del quadrat KLMN és:
$S_{KLMN} = y^2 = 2r^2$.
La proporció entre les àrees dels dos quadrats és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = \frac{2}{5}.$$

298.- En un quadrant de cercle sobre un radi com a diàmetre s'ha inscrit un semicercle i en l'altre radi s'ha inscrit un altre semicercle tangent a l'anterior i al quadrant.
Si el radi del quadrant és R, calculeu el radi del semicercle menor.



Solució:



Siga el quadrant de centre O i radis, $\overline{OA} = \overline{OB} = R$.

Siga M el centre del semicercle de diàmetre $\overline{OB}$.

$\overline{MO} = \frac{R}{2}$.

Siga el semicercle de centre N que passa per A i els tangent al semicercle anterior.

Siga $\overline{NA} = r$ el seu radi.

$\overline{MN} = \frac{R}{2} + r$.

$\overline{NO} = R - r$.

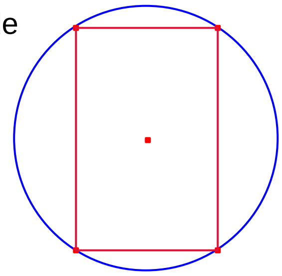
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MON}$:

$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$.

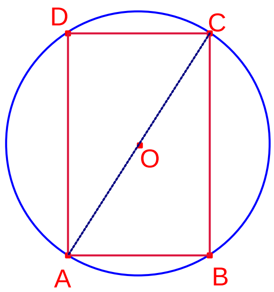
$3Rr = R^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{R}{3}$.

299.- En una circumferència de radi 6 hi ha inscrit un rectangle de perímetre 28.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle ABCD inscrit en la circumferència de centre O i radi 6.
$\overline{AC} = 12$.
Siga $x = \overline{AB}$, $y = \overline{BC}$ costats del rectangle.
L'àrea del rectangle és:
$S_{ABCD} = xy$.
El perímetre del rectangle ABCD és:
$2x + 2y = 28$. Simplificant:
$x + y = 14$.



Aplicant el teorema de Pitàogres al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$x^2 + y^2 = 12^2$.

$14^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.
$14^2 = 12^2 + 2xy$.
$xy = \dfrac{14^2 - 12^2}{2} = 26$.
Aleshores, $S_{ABCD} = xy = 26$.

Generalització:
En una circumferència de radi r hi ha inscrit un rectangle de perímetre p.
Calculeu l'àrea del rectangle.

Solució: $S = \dfrac{p^2 - 16r^2}{8}$.

300.- En la figura es representa una de les finestres de la Catedral de Lincoln.

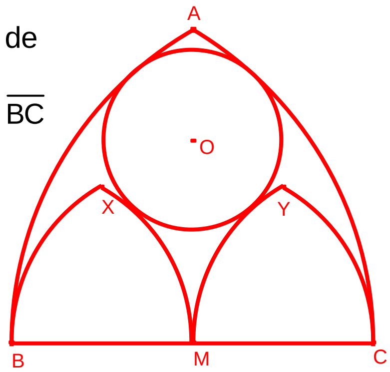
Està formada per dos arc de centre B i C, respectivament i de radi $\overline{BC}$ que s'intersecten en el punt A.

Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$.

Amb centre B i M és dibuixen dos arcs de radi $\overline{BM}$ que s'intersecten en el punt X

Amb centre C i M és dibuixen dos arcs de radi $\overline{BM}$ que s'intersecten el el punt Y.

Es dibuixa una circumferència de centre O que és tangent a 4 arcs.



Siga T el punt on el segment $\overline{AM}$ talla la circumferència anterior més prop de A.

Determineu la raó entre $\overline{TM}$ i $\overline{BM}$.

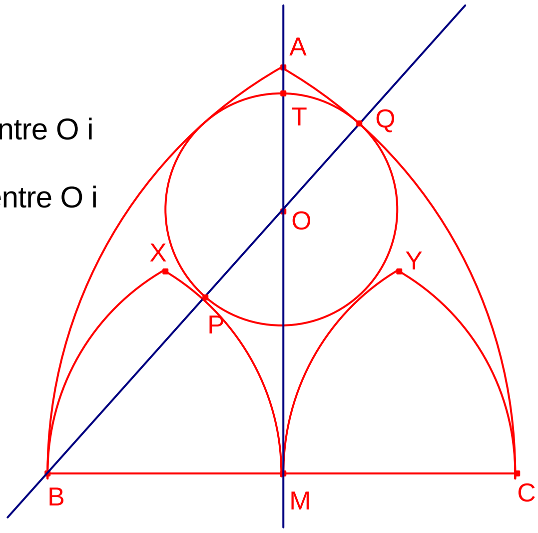
Solució:

Siga $R = \overline{BM}$ radi dels 4 arcs menuts.

$\overline{BC} = 2R$ radi dels dos arcs majors.

Siga P el punt de tangència de la circumferència de centre O i l'arc MX.

Siga Q el punt de tangència de la circumferència de centre O i arc CA.



Siga $r = \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OT}$ radi de la circumferència.

Determinem el seu valor.

$\overline{BO} = \overline{BP} + \overline{OP} = R + r$.

$\overline{BO} = \overline{BQ} - \overline{OQ} = 2R - r$.

Igualant les expressions:

$R + r = 2R - r$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{1}{2}R$.

Calculem $\overline{MT}$.

$\overline{BO} = R + r = \frac{3}{2}R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:

$$\overline{MO} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 - R^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

$$\overline{MT} = \overline{MO} + \overline{OT} = \frac{\sqrt{5}}{2}R + \frac{1}{2}R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R.$$

$$\frac{\overline{MT}}{\overline{BM}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$