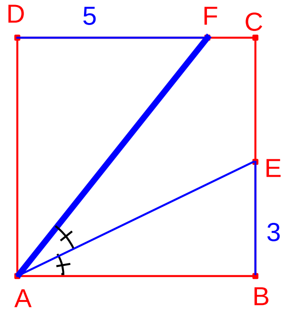


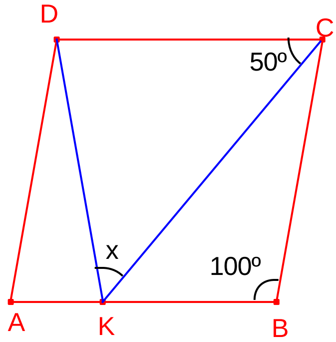
2991.- Siga el quadrat $ABCD$.
Siguen els punts E, F dels costats $\overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament, tals que $\overline{BE} = 3, \overline{DF} = 5$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AF}$

Solució:
Siga $\overline{AB} = c$, costat del quadrat.
Siga $\alpha = \angle BAE$
$\angle DFA = 2\alpha$

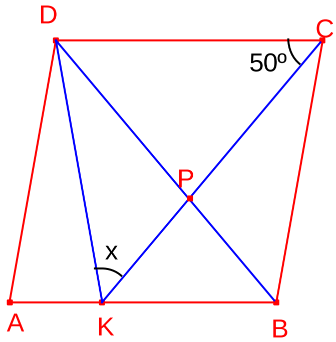
$$\tan\alpha = \frac{3}{c}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{3}{c}}{1-\left(\frac{3}{c}\right)^2} = \frac{c}{5}$$
Simplificant:
$$\frac{6}{c^2-9} = \frac{1}{5}$$
Resolent l'equació:
$c = \sqrt{39}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$
$\overline{AF}^2 = 39 + 25 = 64$
$\overline{AF} = 8$

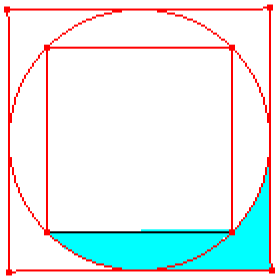
2992.- Siga el rombe $ABCD, B = 100°$.
Siga el punt K del costat $\overline{AB}$ tal que $\angle DCK = 50°$
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle CKD$.



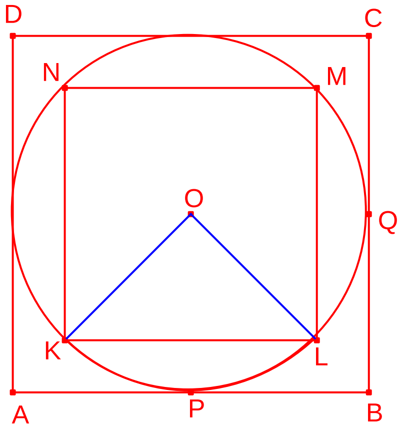
Solució:
$\angle DCB = 80°$
El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle CDB = \angle DBC = 50°$
$\angle KCB = 80° - 50° = 30°$
$\angle CKB = 50°$
Siga P la intersecció dels segments $\overline{BD}, \overline{KC}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{CDP}, \overset{\Delta}{KBP}$ són isòsceles.
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CPK}, \overset{\Delta}{CPB}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $x = \angle CKP = \angle CBP = 50°$



2993.- En una circumferència de radi 4 s'ha inscrit i circumscrit dos quadrats.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

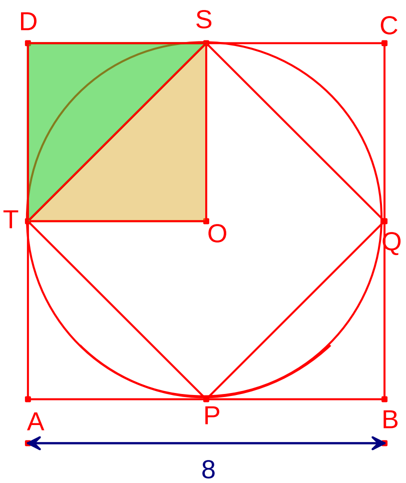


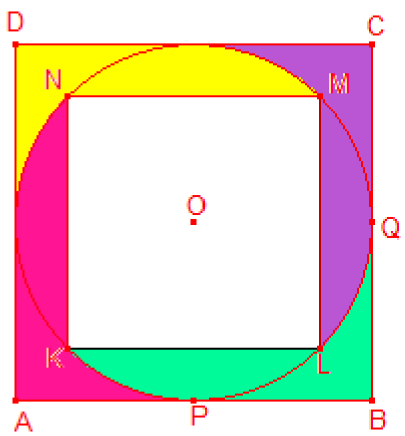
Solució 1:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = R = 4$
Siga el quadrat $KLMN$ inscrita a la circumferència.
Siga el quadrat $ABCD$ circumscrit a la circumferència.
El costat del quadrat és $\overline{AB} = 2R = 8$
El triangle $\overset{\Delta}{KOL}$ és rectangle i isòsceles.



L'àrea ombrejada exterior a l'arc $\widehat{PLQ}$ és:
$S_{PLQ} = \frac{1}{4}(8^2 - \pi 4^2) = 16 - 4\pi$
L'àrea ombrejada pel segment circular $\widehat{KPL}$ és:
$S_{KPL} = \frac{1}{4}\pi 4^2 - \frac{1}{2}4^2 = 4\pi - 8$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = S_{PLQ} + S_{KPL} = 16 - 4\pi + 4\pi - 8 = 8$

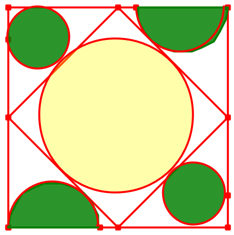
Solució 2:



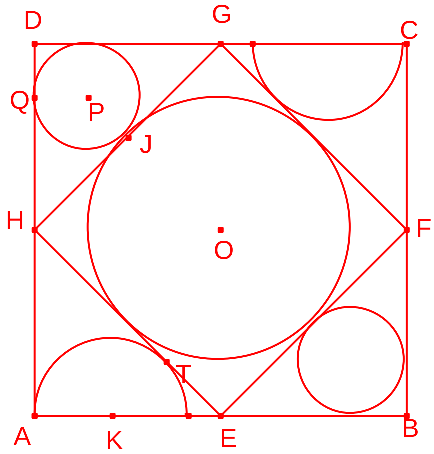


$S_{KLMN} = S_{PQST} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$
$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}S_{PQST} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot 8^2 = 8$

2994.- Amb els punts migs dels costats d'un quadrat s'ha dibuixat un altre quadrat. S'han dibuixat també, tres circumferències i dues semicircumferències.
Calculeu la proporció entre les àrees verda i groga.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $EFGH$ format pels punts migs dels costats del quadrat $ABCD$.



$$\overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OJ} = R = \frac{\sqrt{2}}{4}c$
Siga la semicircumferència de centre K i radi $\overline{KT} = r$

$$\overline{HT} = \frac{c}{2}, \overline{TE} = r$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{1}{2}c + r$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$$

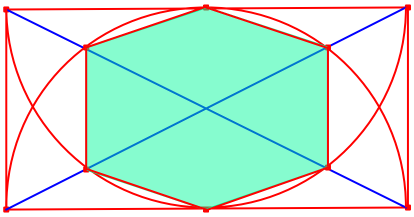
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PT} = s$ inscrita en el triangle rectangle $\overset{\Delta}{HDG}$.

$$s = \frac{2 \cdot \overline{DH} - \overline{HG}}{2} = \frac{c - \frac{\sqrt{2}}{2}c}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}c$$

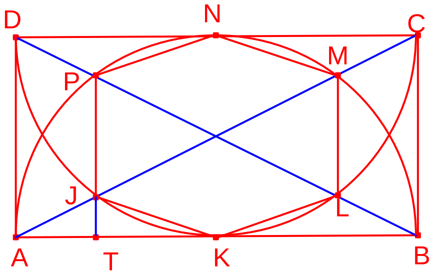
La proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{groga}} = \frac{\pi r^2 + 2\pi s^2}{\pi R^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = 12 - 8\sqrt{2} \approx 0.6863$$

2995.- Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon ombrejat i el rectangle exterior.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ $\overline{AB} = 2R, \overline{AD} = R$, R radi de les dues semicircumferències.
Siga l'hexàgon ombrejat $JKLMNP$.

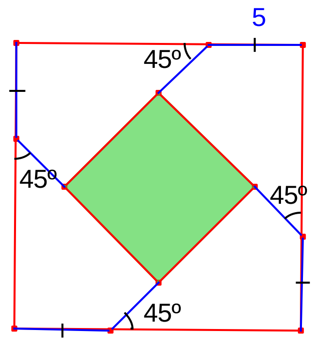


$\overline{AC} = R\sqrt{5}$
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{CD}$:
$\overline{AJ} \cdot \overline{AC} = \overline{AD}^2$
$\overline{AJ} \cdot R\sqrt{5} = R^2$
Resolent l'equació:
$\overline{AJ} = \frac{\sqrt{5}}{5}R$
Siga T la projecció de J sobre el costat $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATJ}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{JT} = \frac{\sqrt{5}}{5}R \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}R$
$\overline{AT} = \frac{2}{5}R$
$\overline{JL} = 2R - 2 \cdot \overline{AT} = \frac{6}{5}R$
$\overline{JP} = R - 2 \cdot \overline{JT} = \frac{3}{5}R$

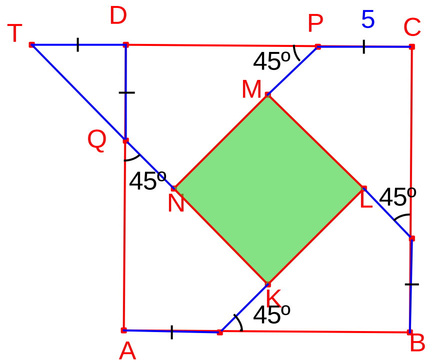
L'àrea de l'hexàgon ombrejat $JKLMNP$ és igual a l'àrea del rectangle JLMP més dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JKL}$

$S_{JKLMNP} = \overline{JL}(\overline{JP} + \overline{JT}) = \frac{6}{5}R\left(\frac{3}{5}R + \frac{1}{5}R\right) = \frac{24}{25}R^2$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 2R^2$
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_{JKLMNP}}{S_{ABCD}} = \frac{12}{25}$

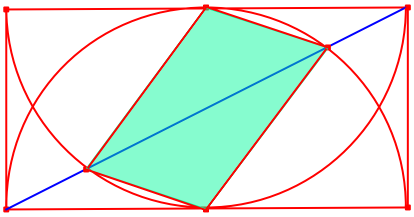
2996.- Calculeu l’àrea del quadrat ombrejat.



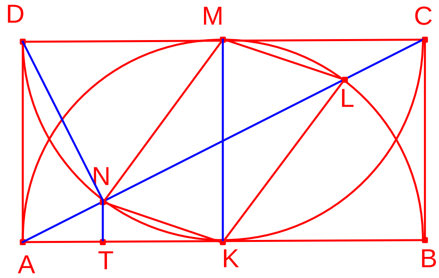
Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$.
Siga $KLMN$ el quadrat interior.
Siguen $\overline{CP} = \overline{DQ} = 5$
$\overline{PM} = \overline{QN}$
Les rectes CD, KN es tallen en el punt T.
$\overline{TN} = \overline{PN}$
Aleshores:
$\overline{TQ} = \overline{MN}$
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{TDQ}$ és isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TDQ}$:
$\overline{TQ}^2 = 50$
Aleshores L’àre3a del quadrat $KLMN$ és:
$S_{KLMN} = \overline{MN}^2 = \overline{TQ}^2 = 50$



2997.- Calculeu la proporció entre les àrees del paral·lelogram ombrejat i el rectangle exterior.



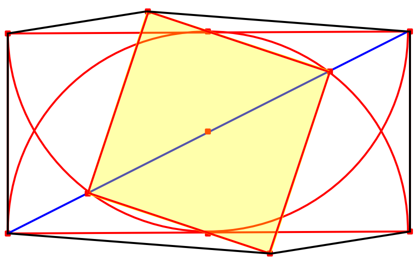
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ $\overline{AB} = 2R, \overline{AD} = R$, R radi de les dues semicircumferències.
Siga el paral·lelogram ombrejat $KLMN$.
$\overline{AC} = R\sqrt{5}$
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{CD}$:
$\overline{AN} \cdot \overline{AC} = \overline{AD}^2$
$\overline{AN} \cdot R\sqrt{5} = R^2$



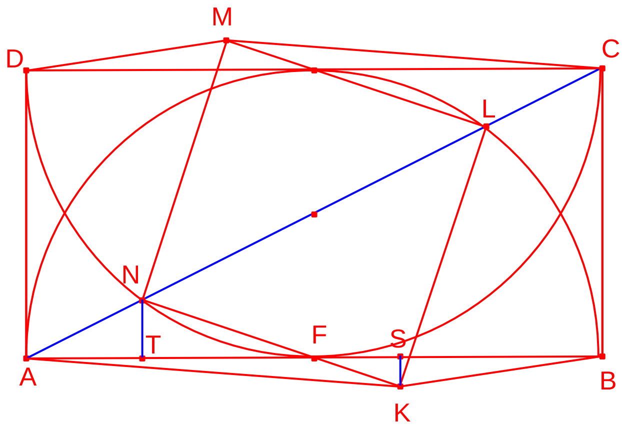
Resolent l'equació:
$\overline{AN} = \frac{\sqrt{5}}{5}R$
Siga T la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATN}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{NT} = \frac{\sqrt{5}}{5}R \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}R$
$\overline{AT} = \frac{2}{5}R$

L'àrea del paral·lelogram $KLMN$ és:
$S_{KLMN} = 2 \cdot S_{KMN} = 2 \cdot \left(S_{AKMD-}(S_{ALK} + S_{DNK} + S_{ADK})\right) =$
$= 2\left(R^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AK} \cdot \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{AT}\right)\right) = 2\left(R^2 - \left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R \cdot \frac{2}{5}R\right)\right) = 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 2R^2$
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{10}$

2998.- Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat ombrejat i l'hexàgon exterior.

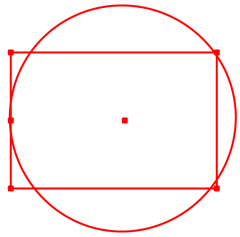


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ $\overline{AB} = 2R, \overline{AD} = R$, R radi de les dues semicircumferències.
Siga el quadrat ombrejat $KLMN$.
$\overline{AC} = R\sqrt{5}$
Siga F el punt mig del costat $\overline{AB}$
Notem que el punt F pertany al costat $\overline{NK}$ del quadrat $KLMN$, ja que $\angle FNC = 45°$.
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{CD}$:

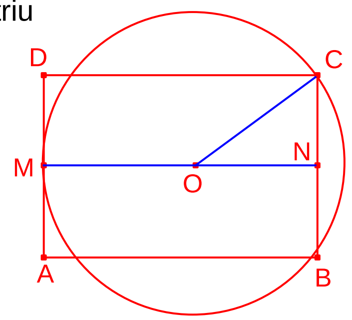


$\overline{AN} \cdot \overline{AC} = \overline{AD}^2$
$\overline{AN} \cdot R\sqrt{5} = R^2$
Resolent l'equació:
$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{5}}{5}R$$
$$\overline{NL} = \overline{AC} - 2 \cdot \overline{AN} = \frac{3\sqrt{5}}{5}R$$
$$\overline{NK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{NL} = \frac{3\sqrt{10}}{10}R$$
L'àrea del quadrat $KLMN$ és:
$$S_{KLMN} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}R\right)^2 = \frac{9}{10}R^2$$
Siga T la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATN}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{NT} = \frac{\sqrt{5}}{5}R \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}R$$
$$\overline{AT} = \frac{2}{5}R$$
$$\overline{TF} = R - \overline{AT} = \frac{3}{5}R$$
$$\overline{FN} = \frac{\sqrt{10}}{5}R$$
$$\overline{FK} = \overline{KN} - \overline{FN} = \frac{\sqrt{10}}{10}R$$
Siga S la projecció de K sobre el costat $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NTF}, \overset{\Delta}{KSF}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{SK} = \frac{1}{2}\overline{NT} = \frac{1}{10}R$$
L'àrea de l'hexàgon $AKBCMD$ és:
$$S_{AKBCMD} = S_{ABCD} + 2 \cdot S_{ABK} = 2R^2 + 2R\frac{1}{10}R = \frac{11}{5}R^2$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{KLMN}}{S_{AKBCMD}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{11}{5}} = \frac{9}{22}$$

2999.- En la figura, els costats del rectangle són 9 i 6.
Calculeu el radi de la circumferència.

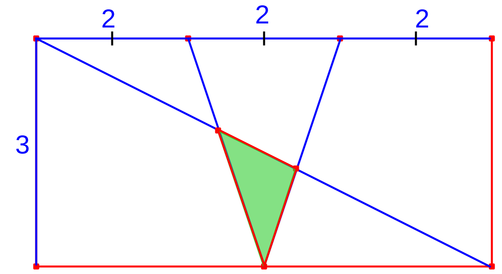


Solució:
Siga el rectangle $ABCD, \overline{AB} = 9, \overline{AD} = 6$
Siguen M, N els punts migs dels costat $\overline{AD}, \overline{BC}$, respectivament.
El centre O de la circumferència pertany a la recta MN (mediatriu al costat $\overline{BC}$)
Siga $\overline{OC} = \overline{OM} = R$ radi de la circumferència.
$\overline{CN} = 3, \overline{ON} = 9 - R$

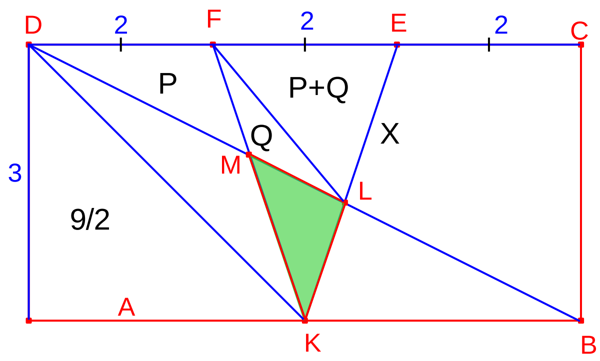


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONC}$:
$R^2 = 3^2 + (9 - R)^2$
Resolent l'equació:
$R = 5$

3000.- Els costats del rectangle de la figura mesuren 6 i 3.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 8, \overline{AD} = 3$
Siguen E, F els punts del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{DF} = \overline{FE} = \overline{EC} = 2$
Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga X l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$



Siga P l'àrea de triangle $\overset{\Delta}{DFM}$
Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FML}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFK}$ és:
$S_{EFK} = 3 = P + 2Q + X$
Els triangles $\overset{\Delta}{DEL}, \overset{\Delta}{BKL}$ són semblants i de raó 4:3
Aplicant el teorema de Tales:
$$S_{BKL} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 (2P + 2Q) = \frac{9}{8}(P + Q)$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFK}$ és:
Els triangles $\overset{\Delta}{DFM}, \overset{\Delta}{BKM}$ són semblants i de raó 2:3
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{X + \frac{9}{8}(P + Q)}{P} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
Simplificant:
$-9P + 9Q + 8X = 0$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DMK}$ és:
$S_{DMK} = S_{DFK} - P = 3 - P$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DKB}$ és:
$$S_{DKB} = 3 - P + X + \frac{9}{8}(P + Q) = \frac{18}{4}$$
Simplificant:
$P + 9Q + 8X = 12$
Considerem el sistema:
$$\begin{cases} P + 2Q + X = 3 \\ -9P + 9Q + 8X = 0 \\ P + 9Q + 8X = 12 \end{cases}$$
Resolent el sistema: $\begin{cases} P = \frac{6}{5} \\ Q = \frac{18}{35} \\ X = \frac{27}{35} \end{cases}$
Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:
$$S_{KLM} = \frac{27}{35}$$