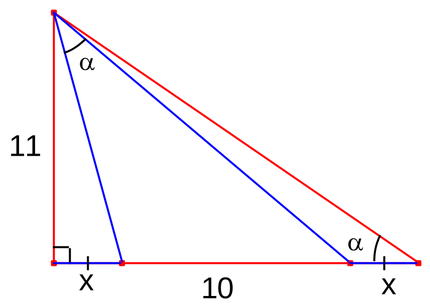
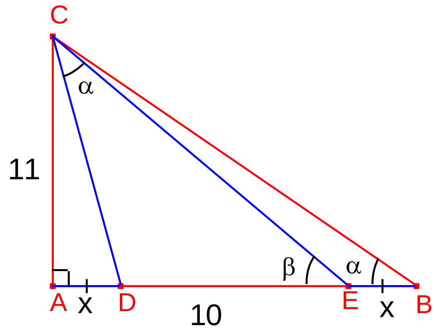
Problemes de Geometria per a l'ESO 301

3001.- Donat el triangle rectangle de la figura, calculeu la mesura x



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = 11$
Siguen $\overline{AD} = \overline{EB} = x, \overline{DE} = 10$
Siga $\beta = \angle AEC$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$\overline{CD} = \sqrt{121 + x^2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEC}$:
$\overline{CE} = \sqrt{121 + (10 + x)^2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = \sqrt{121 + (10 + 2x)^2}$

$$\sin\alpha = \frac{11}{\sqrt{121 + (10 + 2x)^2}}, \sin\beta = \frac{11}{\sqrt{121 + (10 + x)^2}}$$

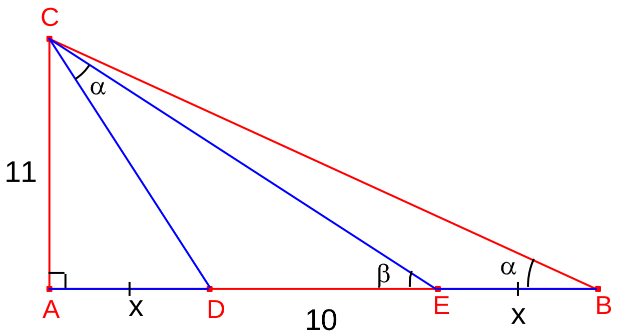
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\frac{10}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CD}}{\sin\beta}$$

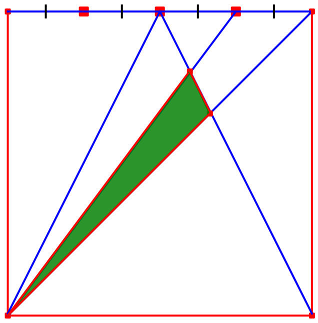
$$\frac{10}{\frac{11}{\sqrt{121 + (10 + 2x)^2}}} = \frac{\sqrt{121 + x^2}}{\frac{11}{\sqrt{121 + (10 + x)^2}}}$$

$$10\sqrt{121 + (10 + 2x)^2} = \sqrt{121 + x^2} \cdot \sqrt{121 + (10 + x)^2}$$

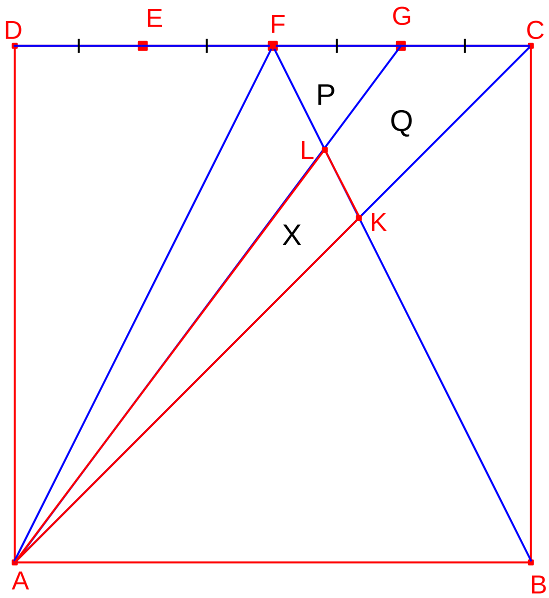
Elevant al quadrat i simplificant:
$x^4 + 20x^3 + 58x^2 + 1580x - 4641 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 3,7$



3002.- El costat del quadrat s'ha dividit en quatre parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del quadrat.

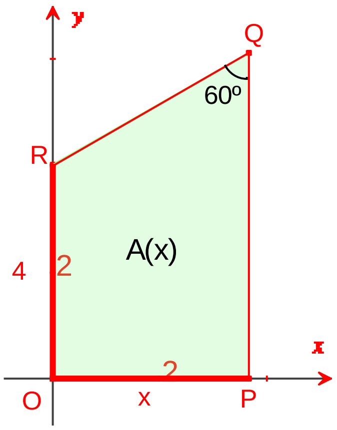


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siguen els punts E, F, G del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC} = \frac{1}{4}$
Siga X l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$



Siguen P, Q les àrees del triangle $\overset{\Delta}{FGL}$ i del quadrilàter $CGLK$, respectivament.
$S_{FCB} = \dfrac{1}{4}$
Aleshores, $S_{BCK} = \frac{1}{4} - (P + Q)$
Els triangles $\overset{\Delta}{FCL}, \overset{\Delta}{BAK}$ són semblants i de raó de semblança 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:
$S_{BAL} = 4(P + Q)$
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} = 4(P + Q) + \dfrac{1}{4} - (P + Q)$
Aleshores:
$P + Q = \dfrac{1}{12}$
$S_{FGA} = \frac{1}{8}$ Aleshores, $S_{ALF} = \frac{1}{8} - P$
Els triangles $\overset{\Delta}{FGL}, \overset{\Delta}{BAL}$ són semblants i de raó 1:4. Aplicant el teorema de Tales:
$X + 4 \cdot \dfrac{1}{12} = 16P$
$X - 16P = -\dfrac{1}{3}$
$S_{ABF} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} - P + X + 4 \cdot \dfrac{1}{12}$
Simplificant:
$X - P = \dfrac{1}{24}$
Considerem el sistema:
$$\begin{cases} X - 16P = -\dfrac{1}{3} \\ X - P = \dfrac{1}{24} \end{cases}$$
Resolent el sistema: $\begin{cases} X = \frac{1}{15} \\ P = \frac{1}{40} \end{cases}$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{AKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{15}$$

3003.- Calculeu l'àrea $A(x)$del trapezi rectangle $OPQR, \overline{OP} = x, \overline{OR} = 4, \angle PQR = 60°$ en funció de x



Solució:

Siga K la projecció de R sobre el costat $\overline{PQ}$

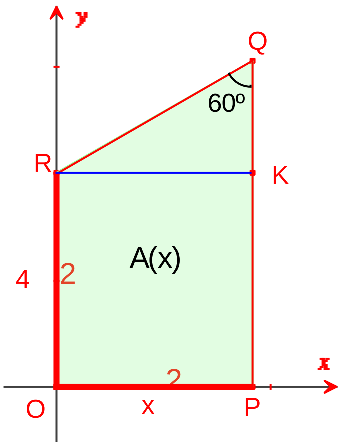
$\angle QRK = 30°, \overline{RK} = x$

$$\overline{QK} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

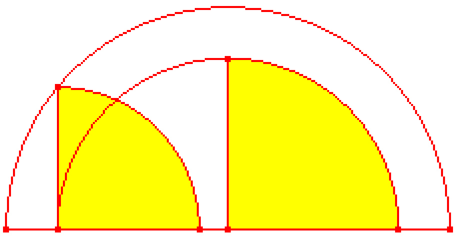
$$\overline{PQ} = 4 + \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

L'àrea del trapezi és:

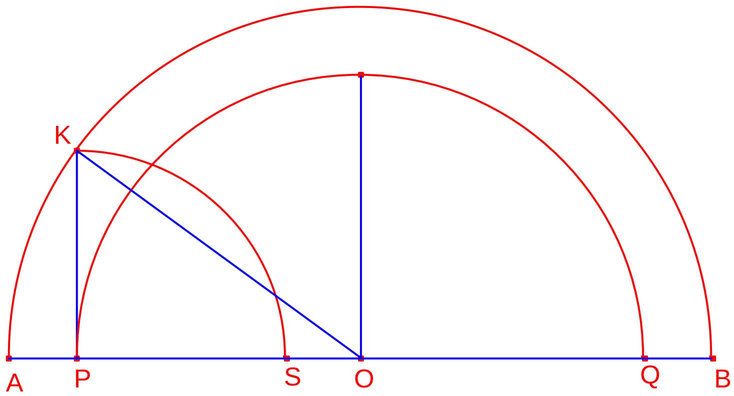
$$A(x) = \frac{4 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + 4x$$



3004.- En la figura calculeu la proporció en la suma de les àrees dels dos quadrants ombrejats i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:

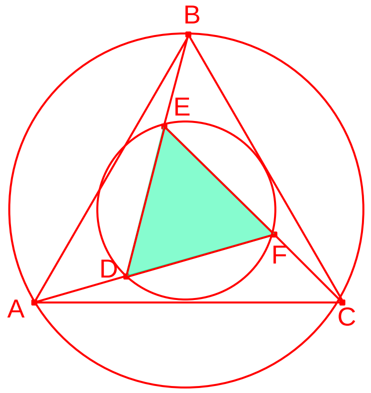


Siga $\overline{OA} = \overline{OK} = R$ radi del semicercle exterior.
Siga $\overline{OP} = r$ radi d'un quadrant.
Siga $\overline{PS} = \overline{PK} = s$ radi de l'altre quadrant.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPK}$:
$R^2 = r^2 + s^2$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{\frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{4}\pi s^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

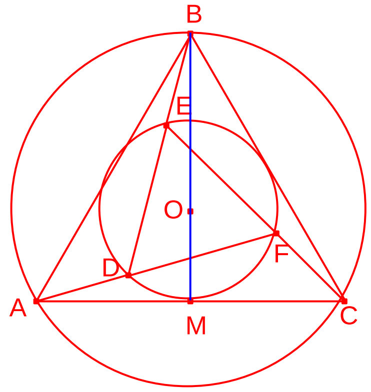
3005.- Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ de la figura, són equilàters.
Calculeu la proporció:
$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$$



Solució:

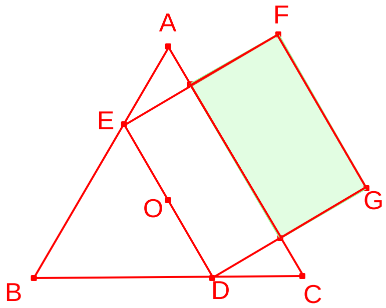
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC} = c$ del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Les circumferències circumscrites als triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ són concèntriques de centre O.
Per la propietat del baricentre:
$$\overline{OB} = 2 \cdot \overline{OM}$$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ són semblants i de raó 2:1.

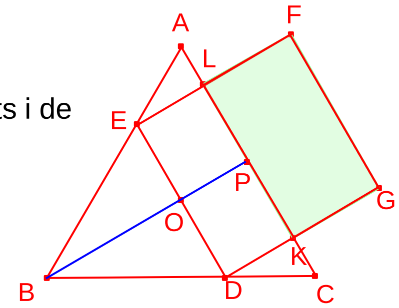


$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{DF} = \frac{1}{2}c$$
Aplicant la potència del punt A respecte de a circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{DEF}$:
$$\overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{AM}^2$$
$$\overline{AD} \cdot (\overline{AD} + \overline{DF}) = \frac{1}{4}c^2$$
$$\overline{AD} \cdot \left(\overline{AD} + \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{4}c^2$$
$$\overline{AD}^2 + \frac{1}{2}c \cdot \overline{AD} - \frac{1}{4}c^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$\overline{AD} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}c = \frac{1}{2 \cdot \Phi}c$$
La proporció dels segments és:
$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2 \cdot \Phi}c} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3006.- El triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ té costat $\overline{AB} = 1$.
El costat $\overline{DE}$ del quadrat $DEFG$ conté el circumcentre O del triangle i és paral·lel al costat $\overline{AC}$
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga P el punt mig del costat $\overline{AC}$.
Siga $FGKL$ el rectangle ombrejat.



Aplicant la propietat del baricentre O del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{PB}$$

Aleshores, els triangle equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EBD}$ són semblants i de raó $1{:}\frac{2}{3}$

Aplicant el teorema de tales:

$$\overline{DE} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{DC} = \frac{1}{3}$$

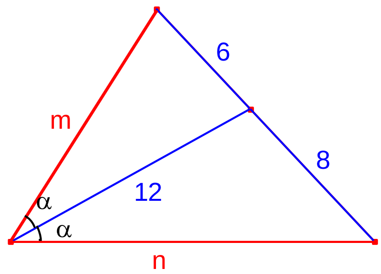
$$\overline{DK} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\overline{KG} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{4-\sqrt{3}}{6}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{FGKL} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4-\sqrt{3}}{6} = \frac{4-\sqrt{3}}{9} \approx 0.2520$$

3007.- Una bisectriu d’un triangle mesura 12 i divideix el costat oposat en dos segments de longituds 6, 8. Calculeu la mesura dels costats m, n del triangle.

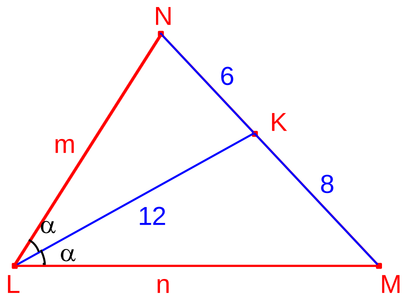


Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{LMN}$.
Siga la bisectriu $\overline{LK} = 12, \overline{NK} = 6, \overline{MK} = 8$
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{6}{m} = \frac{8}{n}$$

$$n = \frac{4}{3}m$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMK}$:

$$64 = 144 + n^2 - 2 \cdot 12n \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{80 + n^2}{24n}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LKN}$:

$$36 = 144 + m^2 - 2 \cdot 12m \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{108 + m^2}{24m}$$

Igualant les expressions:

$$\frac{80 + n^2}{24n} = \frac{108 + m^2}{24m}$$

Simplificant:

$$\frac{80 + n^2}{n} = \frac{108 + m^2}{m}$$

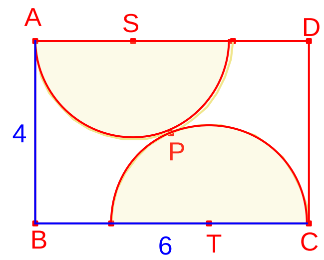
$$\frac{80 + \left(\frac{4}{3}m\right)^2}{\frac{4}{3}m} = \frac{108 + m^2}{m}$$

Simplificant:

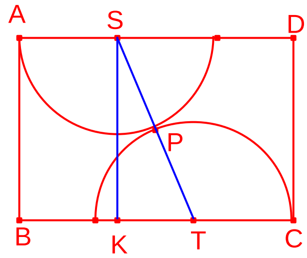
$$m^2 = 144$$

$$m = 12, n = 16$$

3008.- En el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB}=4, \overline{BC}=6$ s'han dibuixat dos semicercles iguals tangents.
Calculeu el radi dels semicercles.

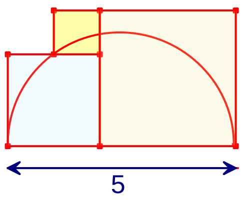


Solució:
Siga $\overline{SA}=\overline{TC}=r$ radis dels dos semicercles.
Siga K la projecció de S sobre $\overline{BC}$.
$\overline{ST}=2r, \overline{SQ}=4, \overline{KT}=6-2r$

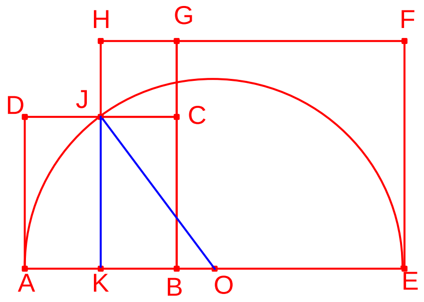


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SKT}$:
$4r^2=16+(6-2r)^2$
Simplificant:
$24r=52$
$r=\dfrac{13}{6}$

3009.- Donat un semicercle de diàmetre 5, s'han dibuixat tres quadrats.
Calculeu la suma de les àrees dels tres quadrats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el quadrat $CGHJ$ de costat $\overline{CJ} = c$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AE} = 5$
Siga K la projecció de J sobre $\overline{AE}$



$a + b = 5$
$b - a = c$

$\overline{OJ} = \frac{5}{2}, \overline{JK} = a, \overline{OK} = \frac{5}{2} - a + c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKJ}$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{5}{2} - a + c\right)^2$$

Simplificant:

$2a^2 - 5a + 5c - 2ac + c^2 = 0$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ b - a = c \\ 2a^2 - 5a + 5c - 2ac + c^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{5-c}{2} \\ b = \dfrac{5+c}{2} \\ 2\left(\dfrac{5-c}{2}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{5-c}{2} + 5c - (5-c)c + c^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{5-c}{2} \\ b = \dfrac{5+c}{2} \\ 5c^2 - 5c = 0 \end{cases}$$

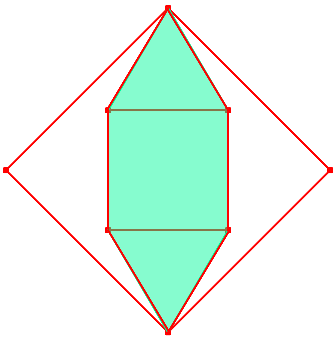
Aleshores:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

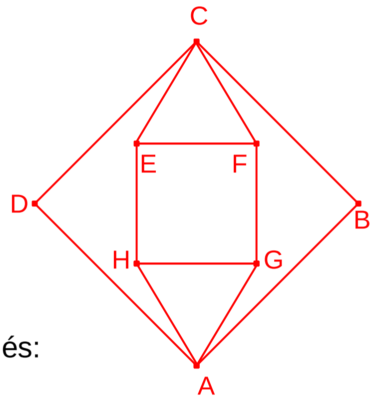
La suma de les àrees dels tres quadrats és:

$S = a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$

3010.- Dins d'un quadrat s'ha dibuixat dos triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.

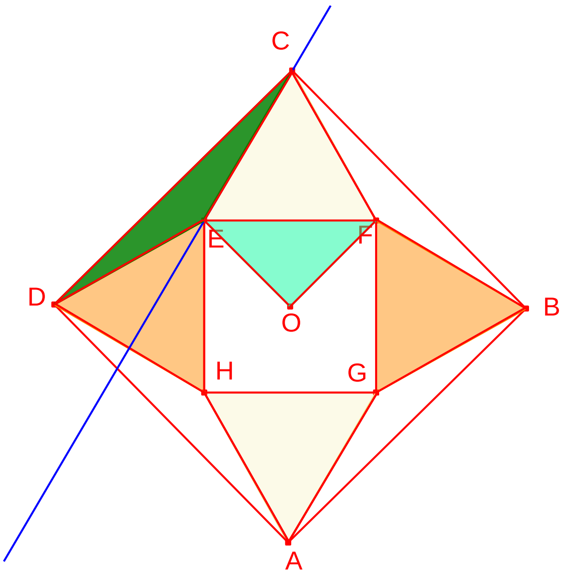


Solució 1:
Siga el quadrat central $EFGH$ de costat $\overline{EF} = 1$
Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{AGH}, \overset{\Delta}{EFC}$
$\overline{AC} = 1 + \sqrt{3}$
L'àrea de l'hexàgon $AGFCEH$ és:
$$S_{AGFCEH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$



L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$
La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior és:
$$\frac{S_{AGFCEH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

Solució 2:



$S_{CED} = S_{EFO}$
La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior és:
$$\frac{S_{AGFCEH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$