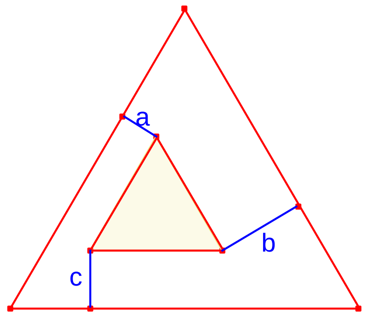
3011.- Donats dos triangles equilàters de costats fixos i paral·lels dos a dos.
Determineu $a+b+c$

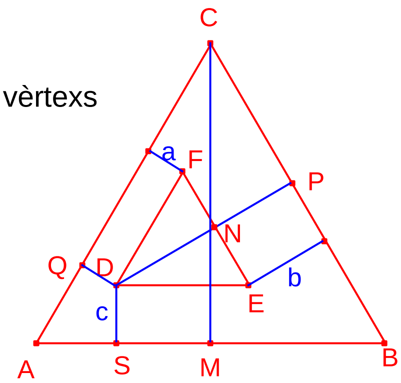


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB}=x$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE}=y$ que té els vèrtexs interiors al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga N el punt mig del costat $\overline{EF}$



Aplicant el teorema de Viviani al punt D:

$\overline{DP}+\overline{DQ}+\overline{DS}=\overline{CM}$

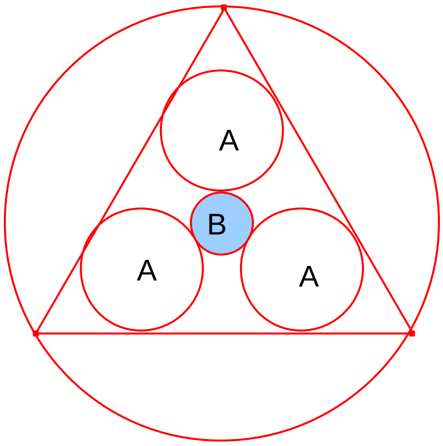
$\overline{DP}=\overline{DN}+\overline{NP}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y+b+a+c=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

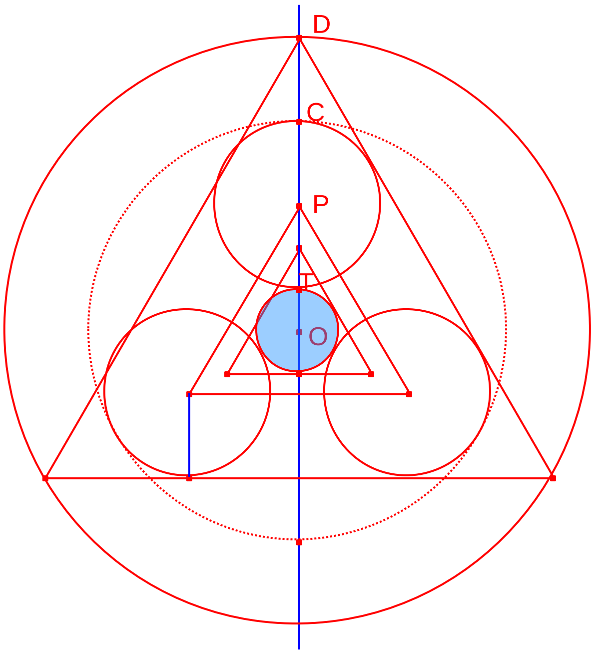
$$a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y)$$

La suma cercada, és igual a la diferència de les altures dels dos triangles equilàters.

3012.- En la figura, dins d'un triangle equilàter hi ha quatre cercles (tres d'àrea A i un d'àrea B) tal que
$A: B = 4: 1$
Calculeu la proporció entre les àrees del cercle blau i el cercle exterior.



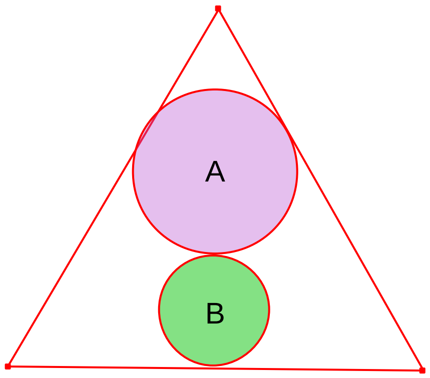
Solució:



Siga O el centre del cercle d'àrea B i radi $\overline{OT} = r$
El punt O és el centre de la circumferència exterior de radi $\overline{OD} = R$
$A: B = 4: 1$ aleshores
El cercle de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PC}$ és tal que, $\overline{PT} = 2r$
$\overline{CD} = 2r$

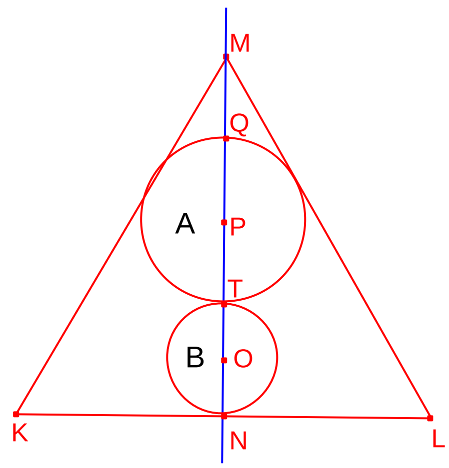
Aleshores:
$7r = R$
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:
$$\frac{S_r}{S_R} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{49}$$

3013.- En l'interior d'un triangle equilàter s'han dibuixat dos cercles d'àrees A, B, tals que la suma $A + B$ és mínima.
Calculeu A: B



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL} = 1$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{ON} = \overline{OT} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = R$
$\overline{QM} = R$



$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3R + 2r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siga $f(R, r) = A + B = \pi(r^2 + R^2)$

$$f(R) = \frac{\pi}{4}\left(13R^2 - 3\sqrt{3}R + \frac{3}{4}\right)$$

La funció és una paràbola còncava.
El mínim s'assoleix en el vèrtex.

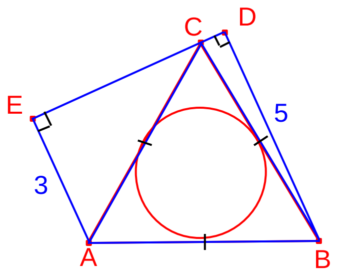
$$R = \frac{3\sqrt{3}}{26}$$

$$r = \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

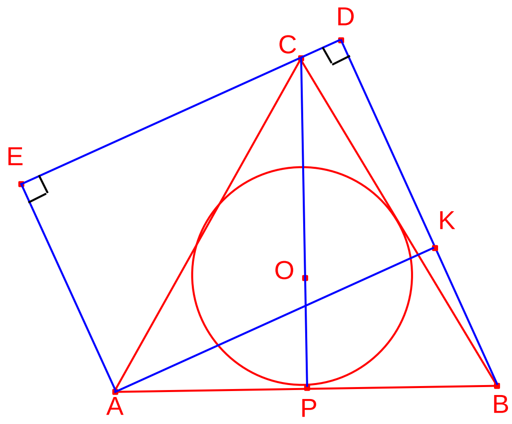
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{9}{4}$$

3014.- En la figura, calculeu l'àrea del cercle inscrit en el triangle equilàter.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga K la projecció de A sobre $\overline{BD}$
$\overline{BK} = 3$

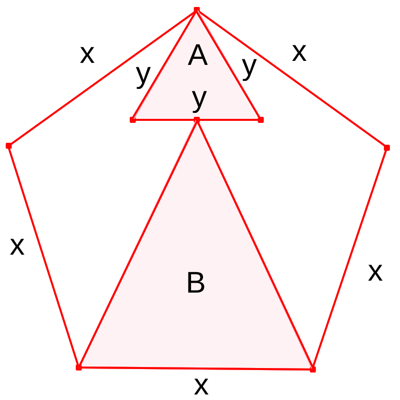


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDC}$:
$\overline{DC} = \sqrt{c^2 - 25}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEC}$:
$\overline{EC} = \sqrt{c^2 - 9}$

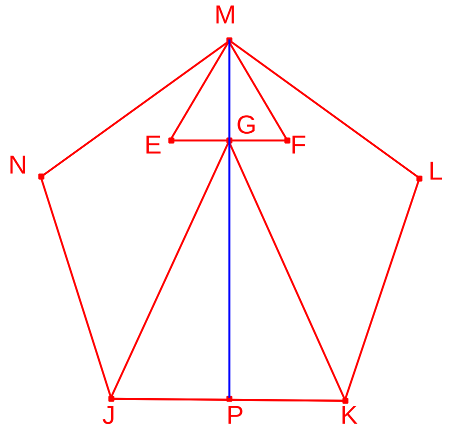
$\overline{AK} = \sqrt{c^2 - 25} + \sqrt{c^2 - 9}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}$:
$c^2 = 4 + \left(\sqrt{c^2 - 25} + \sqrt{c^2 - 9}\right)^2$
Resolent l'equació:
$c^2 = \frac{76}{3}$
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \sqrt{19}$
Siga $r = \overline{OP}$ radi de la circumferència inscrita al triangle equilàter.
$r = \frac{1}{3}\overline{CP} = \frac{\sqrt{19}}{3}$
L'àrea del cercle inscrit al triangle equilàter és:
$S = \pi r^2 = \frac{19}{9}\pi$

3015.- En la figura, la suma $A+B$ dels triangles és mínima.
Calculeu la proporció $x:y$



Solució:
Siga el pentàgon regular $JKLMN$ de costat $\overline{JK}=x=1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{EFM}$ de costat $\overline{EF}=y$
Siga G el punt mig del costat $\overline{EF}$



$$\overline{GM}=\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

Siga P el punt mig del costat $\overline{JK}$

$$\overline{JM}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{PM}=\sqrt{\Phi^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{\Phi+\frac{3}{4}}$$

$$\overline{PG}=\sqrt{\Phi+\frac{3}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

Siga $A+B=f(y)$

$$f(y)=\frac{\sqrt{3}}{4}y^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\Phi+\frac{3}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

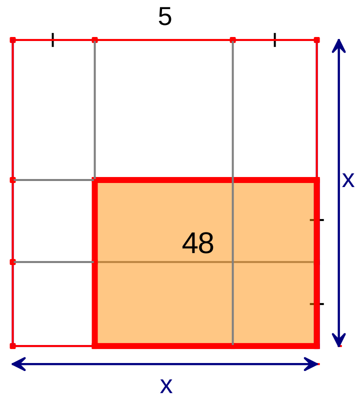
$$f(y)=\frac{\sqrt{3}}{4}y^2-\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{2}\sqrt{\Phi+\frac{3}{4}}$$

La funció és una paràbola còncava. El mínim s'assoleix en el vèrtex:

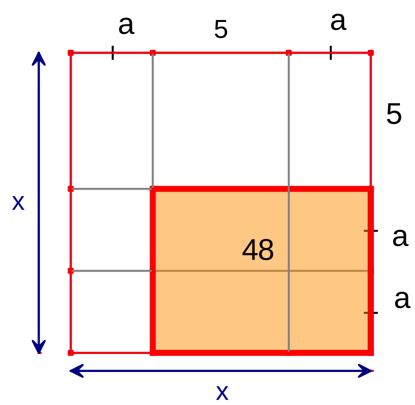
$$y=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$x:y=2:1$$

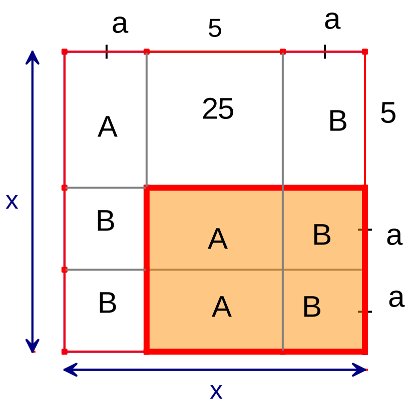
3016.- Calculeu l'àrea del quadrat exterior.
L'àrea del rectangle ombrejat és 48.



Solució 1:
$x = 2a + 5$
L'àrea del rectangle ombrejat és:
$2a(a + 5) = 48$
$2a^2 + 10a - 48 = 0$
Resolent l'equació:
$a = 3$
L'àrea del quadrat exterior és:
$S = x^2 = (5 + 2a)^2 = 11^2 = 121$

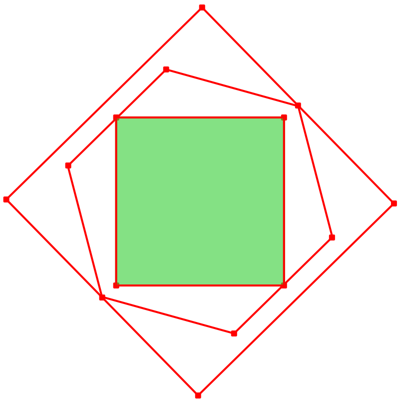


Solució 2:

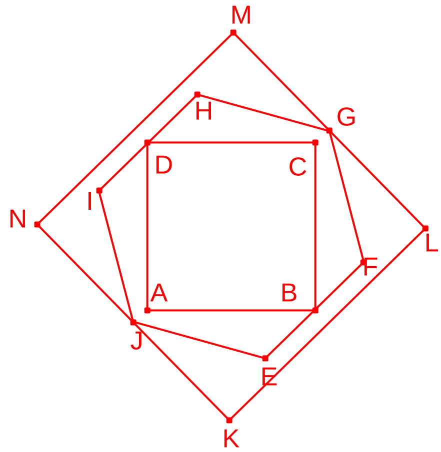


2A+2B=48
x^2=2(2A+2B)+25=121

3017.- Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat ombrejat i el quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat interior $ABCD$ de costat $\overline{AB} = d$
Siga l'hexàgon regular $EFGHIJ$ de costat $\overline{EF} = c$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = \overline{JG} = 2c$



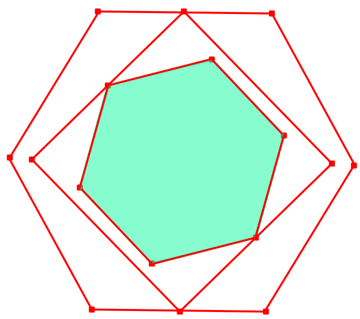
$\overline{BD} = d\sqrt{2} = c\sqrt{3}$

$c = \frac{\sqrt{6}}{3}d$

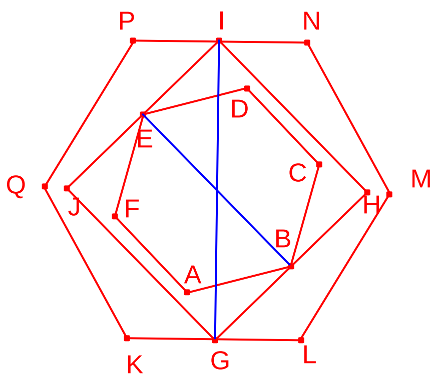
La proporció de les àrees dels dos quadrats és:

$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{8}$

3018.- Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon regular ombrejat i l'hexàgon regular exterior.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $GHIJ$ de costat $\overline{GJ} = \overline{BE} = 2c$
Siga l'hexàgon regular $KLMNPQ$ de costat $\overline{KL} = d$



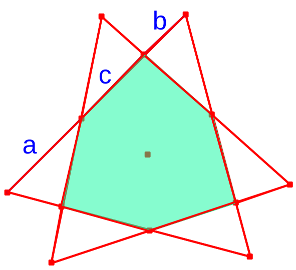
$$\overline{GI} = d\sqrt{3} = 2\sqrt{2} \cdot c$$

$$d = \frac{2\sqrt{6}}{3}c$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{KLMPQ}} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

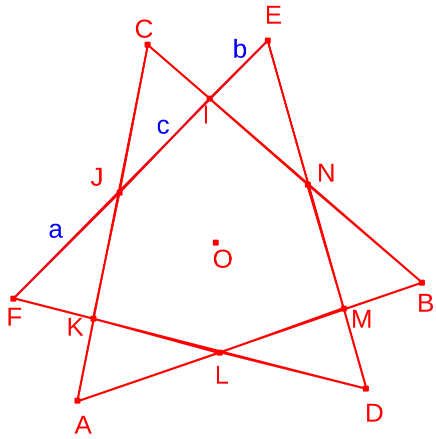
3019.- En la figura hi ha dos triangles equilàters girats amb centre en el baricentre.



Proveu que la proporció entre l'àrea intersecció i l'àrea total és:

$$\frac{c}{a+b}$$

Solució:



Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ de centre O i costat $\overline{AB} = \overline{DE} = a + b + c$

Notem que els triangle $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{BMN}, \overset{\Delta}{CIJ}, \overset{\Delta}{DML}, \overset{\Delta}{EIN}, \overset{\Delta}{FKJ}$ són iguals.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AKL}$

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ és:

$$S_{AKL} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

L'àrea total que la figura és:

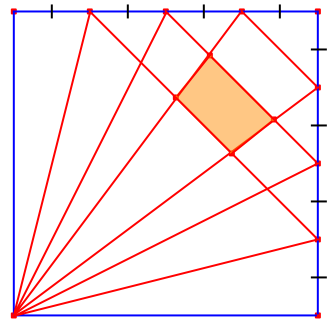
$$\begin{aligned} S_{total} = S_{ABC} + 3 \cdot S_{AKL} &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b+c)^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}ab = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + 5ab + 2ac + 2bc) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2 + 2b^2 + 4ab + 2ac + 2bc) = \frac{\sqrt{3}}{2}((a+b)^2 + (a+b)c) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)(a+b+c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ombrejada} = S_{ABC} - 3 \cdot S_{AKL} &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b+c)^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{4}ab = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - ab + 2ac + 2bc) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2c^2 + 2ac + 2bc) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}c(a+b+c) \end{aligned}$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c(a+b+c)}{\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)(a+b+c)} = \frac{c}{a+b}$$

3020.- En la figura, determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:

Siga el quadrat exterior $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4x$

Siga $\overline{BK} = \overline{KL} = \overline{LN} = \overline{NC} = \overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RD} = x$

Siga S' la projecció de S sobre $\overline{CD}$

Siga V' la projecció de V sobre $\overline{CD}$

$\overline{QS'} = \overline{SS'}, \overline{RV'} = \overline{VV'}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADP}, \overset{\Delta}{SS'P}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{SS'}}{x - \overline{SS'}} = \frac{4x}{3x}$$

Aleshores:

$$\overline{SS'} = \frac{4}{7}x$$

$$\overline{QS} = \overline{SS'}\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{7}x$$

$$\overline{QL} = 2\sqrt{2}x$$

$$\overline{ST} = \overline{QL} - 2\overline{QS} = 2\sqrt{2}x - 2 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{7}x = \frac{6\sqrt{2}}{7}x$$

Siga E el punt mig del segment $\overline{ST}$

$$\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = 4\sqrt{2}x - \sqrt{2}x = 3\sqrt{2}x$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADP}, \overset{\Delta}{VV'P}$ són semblants.

Siga F el punt mig del segment $\overline{VU}$

$$\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{CF} = 4\sqrt{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{2}x = \frac{5\sqrt{2}}{2}x$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AVU}, \overset{\Delta}{AST}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{5}{6}$$

$$\overline{UV} = \frac{5}{6}\overline{ST} = \frac{5\sqrt{2}}{7}x$$

$$\overline{FE} = \overline{CF} - \overline{CE} = \frac{3}{2}\sqrt{2}x - \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

L'àrea del trapezi $STUV$ és:

$$S_{STUV} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{7}x + \frac{5\sqrt{2}}{7}x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{11}{14}x^2$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = 16x^2$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{STUV}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{11}{14}x^2}{16x^2} = \frac{11}{224}$$