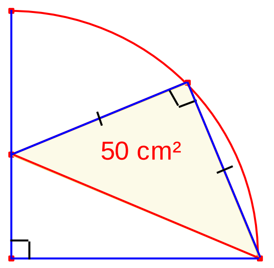
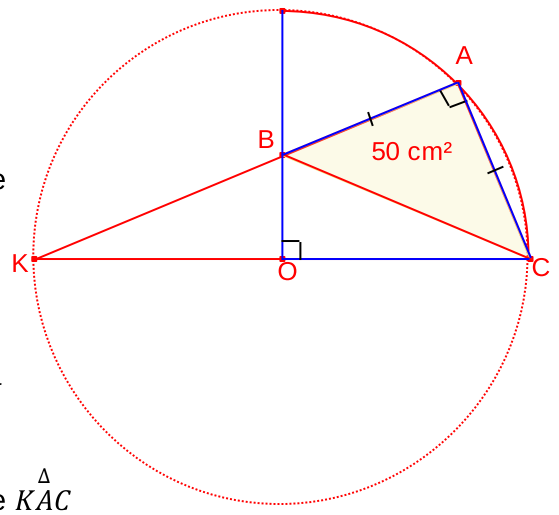
3021.- Calculeu l'àrea del quadrant si té inscrit un triangle rectangle i isòsceles d'àrea $50\ cm^2$



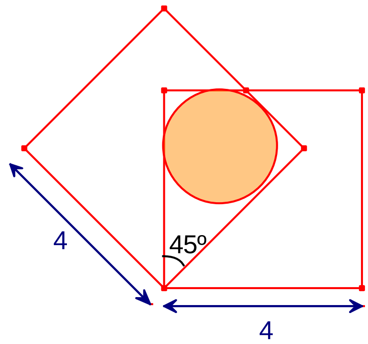
Solució:
Siga el quadrant de centre O.
Siga $\overline{OC} = r$ el radi.



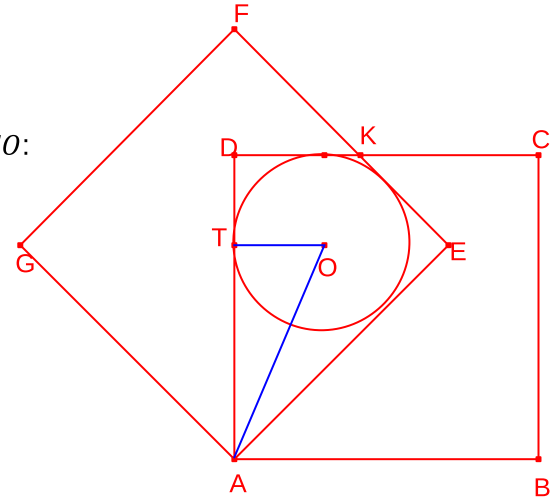
Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
L'àrea és $50\ cm^2$
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = 10\sqrt{2}$
Dibuixem les rectes AB, OC. Que s'intersecten en el punt K.
Per ser $A = 90°$ $\overline{KC}$ és diàmetre de la circumferència que conté el quadrant.
$\overline{BK} = \overline{BC} = 10\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KAC}$
$4r^2 = 10^2 + \left(10 + 10\sqrt{2}\right)^2$
$r^2 = 100 + 50\sqrt{2}$
L'àrea del quadrant és:
$$S = \frac{1}{4}\pi\left(100 + 50\sqrt{2}\right) = \left(25 + \frac{25}{2}\sqrt{2}\right)\pi \approx 134.08$$

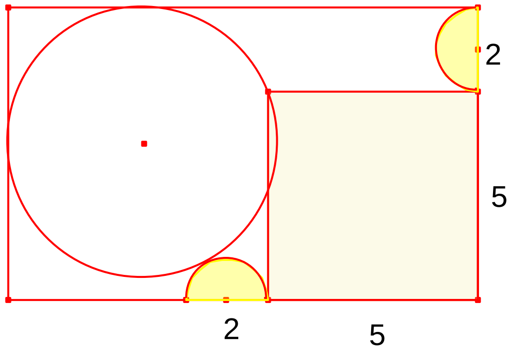
3022.- Donats dos quadrats iguals girats 45º amb centre un dels vèrtexs, calculeu el radi de la circumferència tangents als costats del quadrilàter intersecció d'ambdós quadrats.



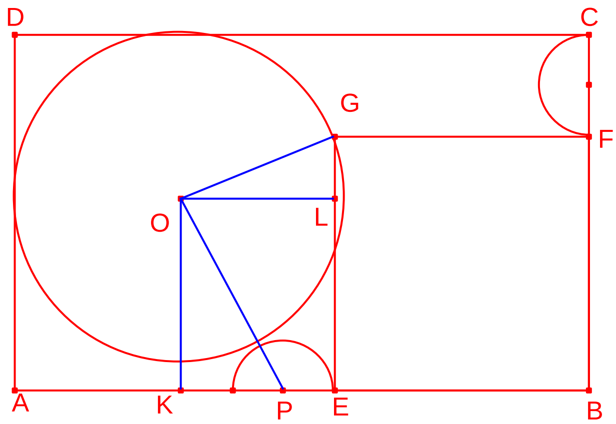
Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, AEFG$ de costats iguals $\overline{AB} = \overline{AE} = 4$
Siga $\angle DAE = 45°$
Siga O el centre de la circumferència tangent al quadrilàter $AEKD$ de radi $\overline{OT} = r$
$\angle TAO = \frac{45°}{2}$
$\tan\frac{45°}{2} = \sqrt{2} - 1$
$\overline{AT} = 4 - r$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATO}$:
$\frac{r}{4 - r} = \tan\frac{45°}{2} = \sqrt{2} - 1$
Resolent l'equació:
$r = 2\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 1.1716$



3023.- Calculeu l’àrea del rectangle exterior de la figura.



Solució:
Siga el rectangle exterior $ABCD$, $\overline{BC}=7$.
Siga el quadrat $EBFG$ de costat $\overline{EB}=5$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OG}=r$
Siga P el centre de la semicircumferència inferior de radi $\overline{PE}=1$
Siga $\overline{AE}=a$
Siga K la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$
Siga L la projecció de O sobre $\overline{EG}$
$\overline{OK}=7-r, \overline{OP}=1+r, \overline{KP}=a-r-1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:
$(1+r)^2=(7-r)^2+(a-r-1)^2$
Simplificant:
$49-14r+a^2+r^2-2ar-ar$



$\overline{OL}=a-r, \overline{LG}=r-2$

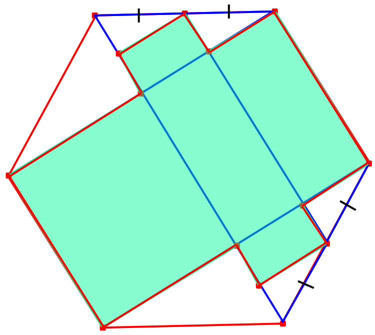
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLG}$:
$r^2=(r-2)^2+(a-r)^2$
Simplificant:
$a^2+r^2-2ar=4r-4.$
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} a=\dfrac{25}{4} \\ r=\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

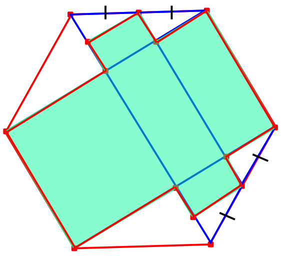
L’àrea del rectangle $ABCD$ és:

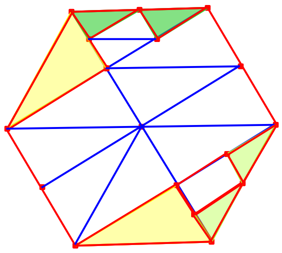
$$S_{ABCD}=\left(5+\frac{25}{4}\right)7=\frac{315}{4}$$

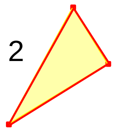
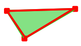
3024.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular exterior.

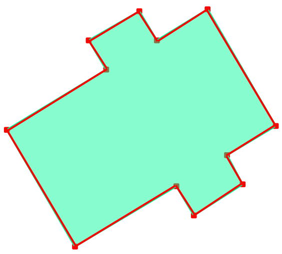


Solució:



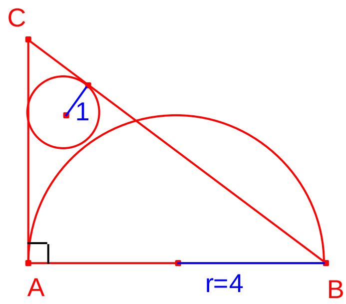


2  + 4  = 1/6+1/12=1/4



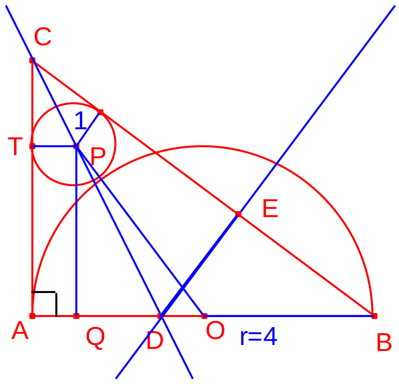
1-1/4=3/4

3025.- Calculeu la mesura del catet $\overline{AC}$ del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



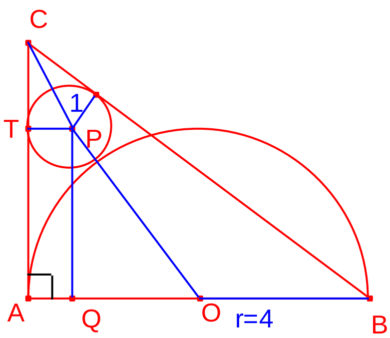
Solució 1:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 8$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = 1$
Siga Q la projecció de P sobre el catet $\overline{AB}$
$\overline{OP} = 5, \overline{OQ} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO}$
$\overline{PQ} = 4$
Siga la bisectriu CD.
Siguen $\overline{CT} = x, \overline{AD} = a$
$\overline{AT} = \overline{PQ} = 4$



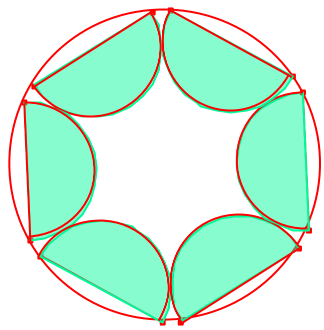
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CTP}, \overset{\Delta}{CAD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1}{x} = \frac{a}{x+4}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = \sqrt{64 + (x+4)^2}$
Siga E la projecció del punt D sobre la hipotenusa $\overline{BC}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EBD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{a}{8-a} = \frac{x+4}{\sqrt{64+(x+4)^2}}$$
Resolent el sistema format per les dues equacions:
$$\begin{cases} x = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$
Aleshores:
$\overline{AC} = 4 + 2 = 6$

Solució 2:
Siga $\angle ACP = \angle PCB = \alpha, C = 2\alpha$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = 1$
$\overline{CT} = x$
Siga Q la projecció de P sobre el catet $\overline{AB}$
$\overline{OP} = 5, \overline{OQ} = 3$

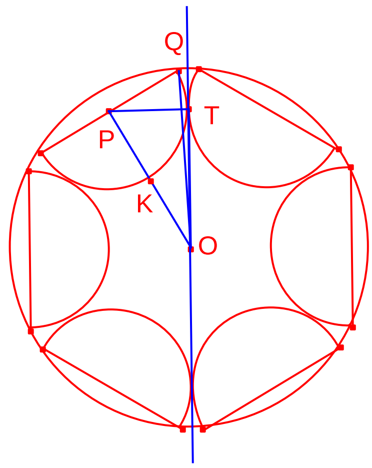


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO}$:
$\overline{PQ} = \overline{AT} = 4$
$$\tan 2\alpha = \frac{8}{4+x} = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2x}{x^2-1}$$
$$\frac{8}{4+x} = \frac{2x}{x^2-1}$$
Resolent l'equació:
$x = 2$
Aleshores:
$\overline{AC} = 4 + 2 = 6$

3026.- Sis semicircumferències tangents, interiors a una circumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



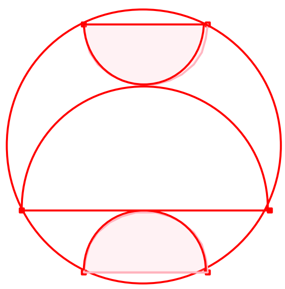
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OQ} = R$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PK} = r$
Siga T el punt de tangència de dues semicircumferències.
$\angle POT = 30°$
$\overline{OP} = 2 \cdot \overline{PT} = 2r$



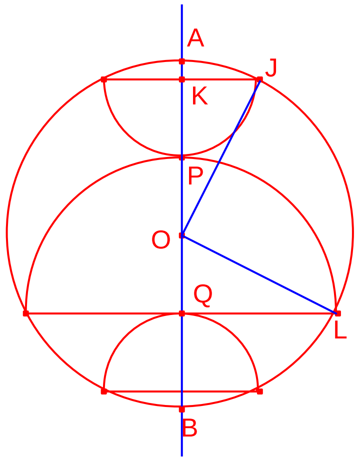
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$R^2 = 4r^2 + r^2$
$R^2 = 5r^2$

La proporció de les àrees és igual al quocient de les àrees de 3 cercles de radi r i un cercle de radi R:
$$\frac{3 \cdot S_r}{S_R} = \frac{3 \cdot \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3}{5}$$

3027.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos semicercles iguals ombrejats i el cercle exterior.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = R$
Siga la semicircumferència de centre K i radi $\overline{KJ} = \overline{KP} = r$
$\overline{OP} = \overline{OQ} = a$



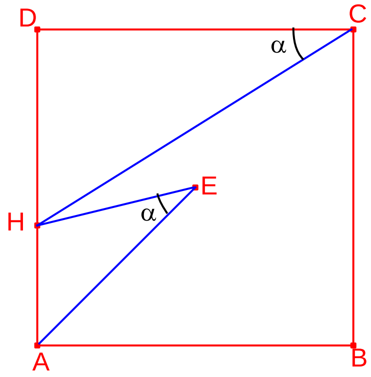
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QP} = \overline{KL} = 2a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQL}$:
$R^2 = a^2 + 4a^2$
$R^2 = 5a^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKJ}$:
$R^2 = r^2 + (r + a)^2$
$5a^2 = 2r^2 + a^2 - 2ra$
$r^2 - ar - 2a^2 = 0$
Resolent l'equació:
$r = a$

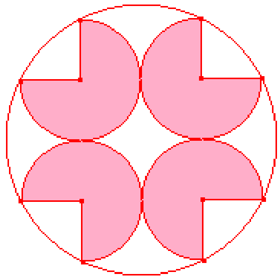
La proporció entre les àrees és la proporció entre dos cercles de radis r, R:
$$\frac{S_r}{S_R} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5}$$

3028.- Donat el quadrat $ABCD$ de centre E.
Siga H del costat $\overline{AD}$ tal que $\angle DCH = \angle HEA = \alpha$
Calculeu
$$\frac{\overline{DH}}{\overline{AH}}$$

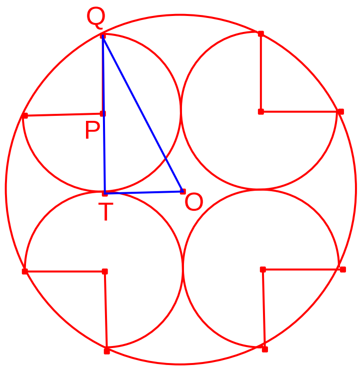


Solució:
Siguen $\overline{AB} = 1, \overline{DH} = x, \overline{AH} = 1 - x$
$\angle HAE = 45°$
$$\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEH}$:
$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(45° + \alpha)} = \frac{1 - x}{\sin\alpha}$$
Simplificant:
$$\frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - x}{\sin\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha}$$
$$\tan\alpha = \frac{1 - x}{x} = x$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{\overline{DH}}{\overline{AH}} = \frac{x}{1 - x} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

3029.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



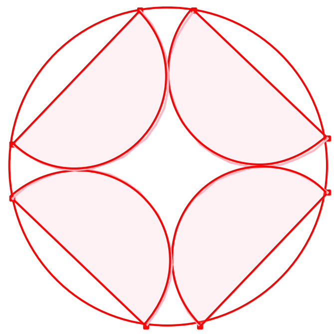
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OQ} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTQ}$:
$R^2 = 4r^2 + r^2$
$R^2 = 5r^2$
L'àrea entre la zona ombrejada i l'àrea exterior és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{4 \cdot \frac{3}{4}\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3r^2}{5r^2} = \frac{3}{5}$$

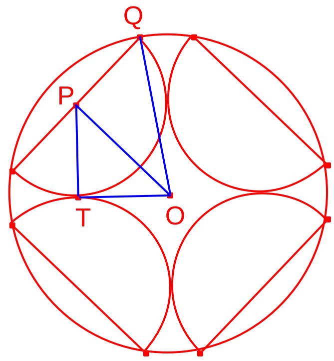
3030.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada (quatre semicercles iguals i tangent) i l'àrea del cercle exterior.



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OQ} = R$

Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OTP}$:

$\overline{OP} = r\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$R^2 = r^2 + 2r^2$

$R^2 = 3r^2$

L'àrea entre la zona ombrejada i l'àrea exterior és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{2r^2}{3r^2} = \frac{2}{3}$$