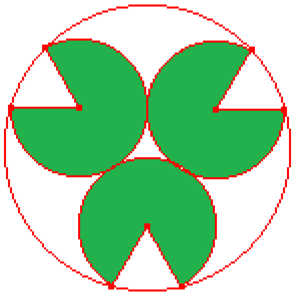
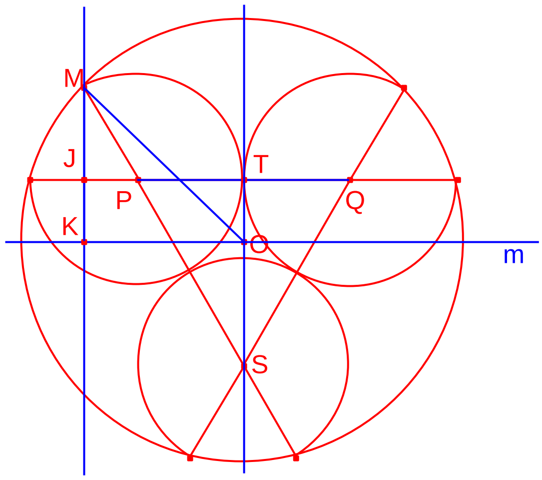
3031.- A la figura hi ha tres $\frac{5}{6}$ cercles iguals dins d'un cercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siguen P, Q, S els centres dels $\frac{5}{6}$ cercles iguals i tangents, de radi $\overline{PT} = r$
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OM} = R$
Siga J la projecció de M sobre la recta PT
Siga m la recta perpendicular a la recta OT que passa per O.
Siga K la intersecció de les rectes JM i m.



$$\overline{PJ} = \frac{1}{2}\overline{PM} = \frac{1}{2}r, \overline{MJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$
$$\overline{OT} = \frac{1}{3}\overline{TS} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$
$$\overline{OK} = \frac{3}{2}r, \overline{MK} = \frac{5\sqrt{3}}{6}r$$

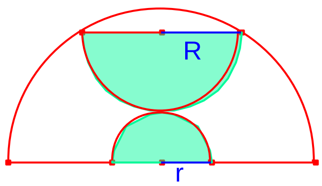
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKM}$:

$$R^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}r\right)^2 = \frac{13}{3}r^2$$

La proporció d'àrees és:

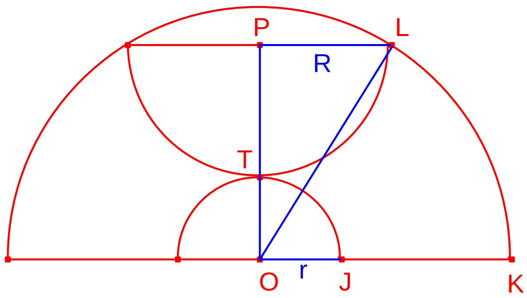
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{3 \cdot \pi \frac{5}{6} r^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{13}{3}} = \frac{15}{26}$$

3032.- Donats tres semicercles i saben que la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle exterior és mínima, calculeu
$\frac{R}{r}$



Solució:
Siga el semicercle exterior de centre O i radi $\overline{OK} = a$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OJ} = r$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PL} = R$

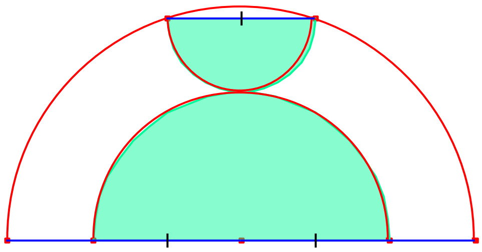
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPL}$:
$a^2 = R^2 + (R + r)^2$
$a^2 = 2R^2 + 2Rr + r^2$
La proporció entre l'àrea ombrejada i el semicercle exterior és:



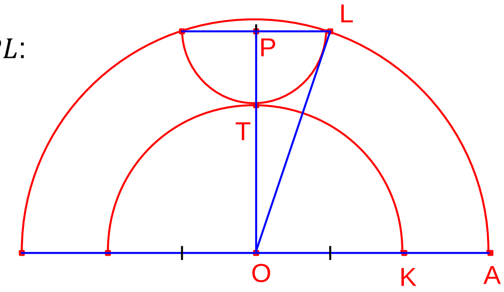
$$P = \frac{\frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2)}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{R^2 + r^2}{2R^2 + 2Rr + r^2}$$
$$P = \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 1}{2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{R}{r}\right) + 1}$$

Siga $x = \frac{R}{r}$
$$P(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 2x + 1}$$
L'àrea és mínima:
$$P'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$$
$P'(x) = 0$
$2x^2 - 2x - 2$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$
$$P"\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) > 0$$
Aleshores, quan $\frac{R}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ l'àrea ombrejada és mínima.

3033.- Els semicercles ombrejats el radi del gran és igual al diàmetre del menut.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle exterior.

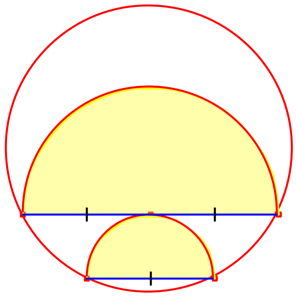


Solució:
Siga el semicercle exterior de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OL} = R$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PT} = r$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OK} = 2r$

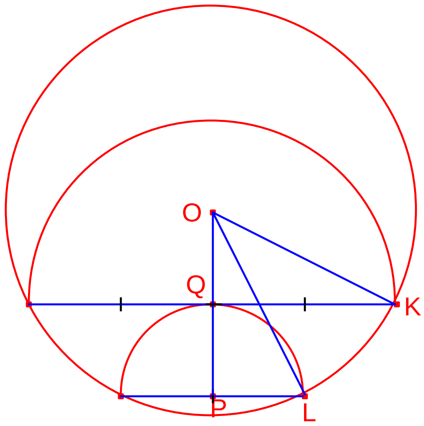


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPL}$:
$R^2 = 9r^2 + r^2$
$R^2 = 10r^2$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}\pi(4r^2 + r^2)}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{5r^2}{10r^2} = \frac{1}{2}$$

3034.- Els semicercles ombrejats el radi del gran és igual al diàmetre del menut.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga el cercle exterior de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = R$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PQ} = r$
Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QK} = 2r$
Siga $\overline{OQ} = a$

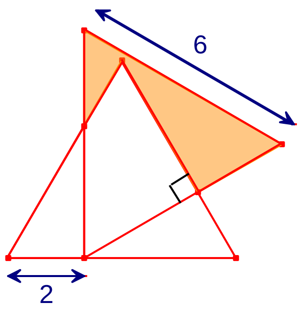


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPL}$:
$R^2 = (r + a)^2 + r^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQK}$:
$R^2 = 4r^2 + a^2$
Igualant les dues expressions:
$(r + a)^2 + r^2 = 4r^2 + a^2$
Simplificant:
$a = r$

$R^2 = 5r^2$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}\pi(4r^2 + r^2)}{\pi R^2} = \frac{\frac{5}{2}r^2}{5r^2} = \frac{1}{2}$$

3035.- Dos triangles de costat 6 estan superposats.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea d'un dels triangles equilàters.

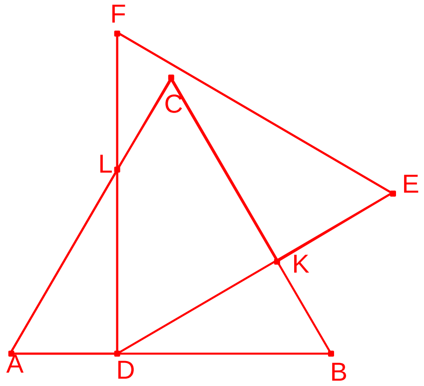


Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ de costats $\overline{AB} = \overline{DE} = 6$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}6^2 = 9\sqrt{3}$$



Siguen K, L les interseccions dels dos triangles.

$\overline{DL} = 2\sqrt{3}$

Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADL}, \overset{\Delta}{BKD}$ són iguals.

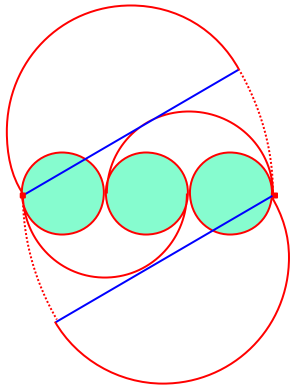
$$S_{CKEFL} = S_{DEF} - S_{DKCL} = S_{DEF} - (S_{ABC} - 2 \cdot S_{ADL})$$

$$S_{CKEFL} = 2 \cdot S_{ADL} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{CKEFL}}{S_{ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{4}{9}$$

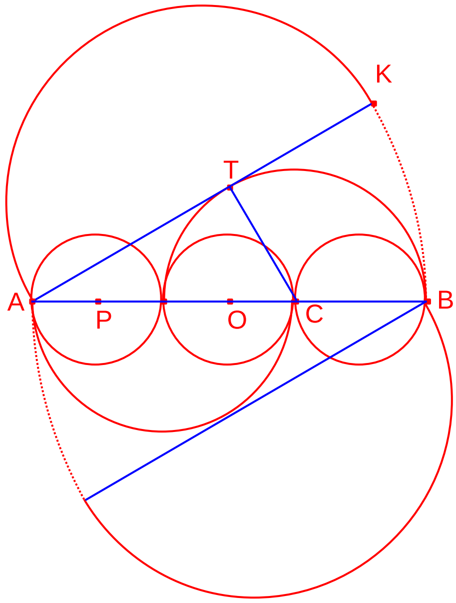
3036.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



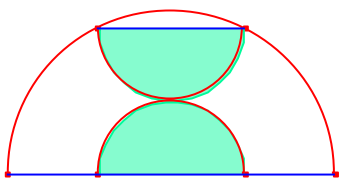
Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PA} = 1$
$\overline{AB} = \overline{AK} = 6$
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre C i radi $\overline{CB} = 2$ i la recta AK.
$\overline{CT} = 2, \overline{AC} = 4, \angle ATC = 90°$
Aleshores, $\angle TAC = 30°$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del tres cercles de radi 1.
L'àrea total és igual a l'àrea de dos semicircumferències de diàmetre $\overline{AK} = 6$ més dos sectors de $30°$ i radi $\overline{AK} = 6$
La proporció entre les àrees és:

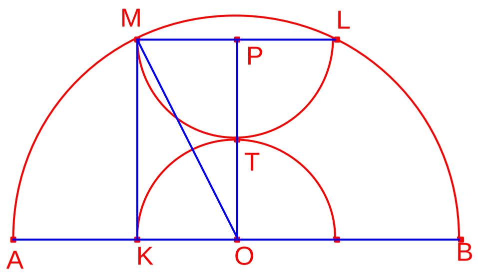
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{3 \cdot \pi \cdot 1^2}{2 \cdot \frac{1}{2}\pi 3^2 + 2 \cdot \frac{1}{12}\pi 6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$



3037.- Els dos semicercles ombrejats de la figura són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OT} = r$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PT} = r$

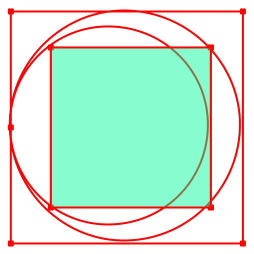


$\overline{KM} = \overline{OP} = 2r, \overline{OM} = R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKM}$:
$R^2 = 4r^2 + r^2$
$R^2 = 5r^2$

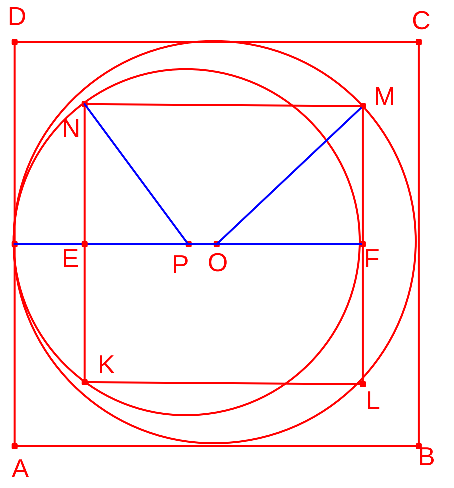
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2r^2}{5r^2} = \frac{2}{5}$$

3038.- En la figura hi ha dos circumferències tangents interiors i dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:
Siga el quadrat exteriror $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat interior $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga la circumferència tangent al quadrat exterior de centre O i radi $\overline{OM} = \frac{1}{2}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PN} = \overline{PF} = r$



$$\overline{PE} = c - r, \overline{NE} = \frac{1}{2}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PEN}$

$$r^2 = (c-r)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Simplificant:

$$r = \frac{5}{8}c$$

$$\overline{OF} = 2r - \frac{1}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OFM}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(2r - \frac{1}{2}\right)^2$$

Simplificant:

$$\frac{1}{4}c^2 + 4r^2 - 2r = 0$$

$$\frac{1}{4}c^2 + 4\left(\frac{5}{8}c\right)^2 - 2\frac{5}{8}c = 0$$

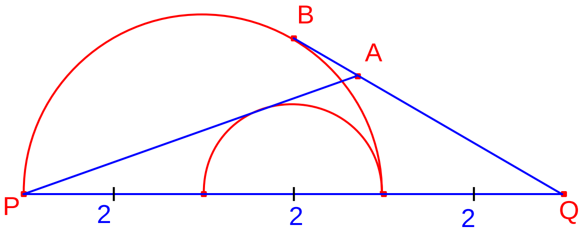
Resolent l'equació:

$$c = \frac{20}{29}$$

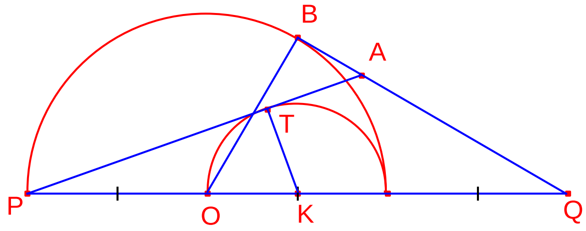
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = c^2 = \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{400}{841}$$

3039.- En la figura, els segments $\overline{PA}, \overline{QB}$ són tangents a cadascuna de les dues semicircumferències.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OB} = 2$
Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KT} = \overline{KO} = 1$

En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBT}$, $\overline{OB} = 2, \overline{OQ} = 4$
Aleshores, $\angle AQB = 30°, \overline{QB} = 2\sqrt{3}$

Siga $\angle APQ = \alpha$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTK}$:
$$\sin\alpha = \frac{1}{3}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

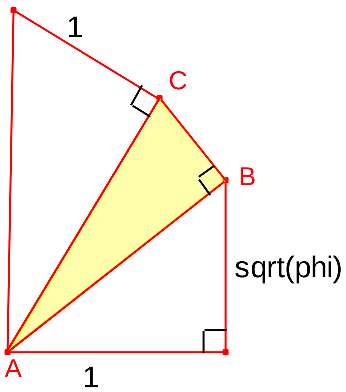
Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{PQA}$:
$$\frac{\overline{AQ}}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin(\alpha + 30°)}$$

$$\frac{\overline{AQ}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}}$$

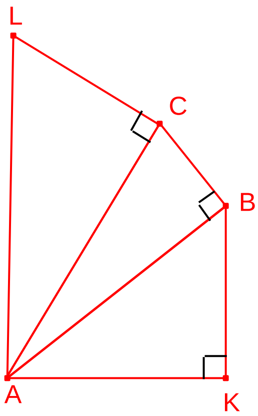
Resolent l'equació:
$$\overline{AQ} = \frac{12\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{5}$$

$$\overline{AB} = \overline{QB} - \overline{AQ} = 2\sqrt{3} - \frac{12\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{5} = \frac{22\sqrt{3} - 24\sqrt{2}}{5} \approx 0.8328$$

3040.- En la figura hi ha tres triangles rectangles.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}, K = 90°, \overline{AK} = 1, \overline{KB} = \sqrt{\Phi}$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AB} = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACL}, C = 90°, \overline{CL} = 1, \overline{AL} = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AC} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{BC} = \sqrt{3 - \Phi^2} = \sqrt{3 - \Phi - 1} = \sqrt{2 - \Phi} = \sqrt{1 - (\Phi - 1)} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Phi}} = \sqrt{\frac{\Phi - 1}{\Phi}} = \frac{1}{\Phi}$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\Phi \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{2}$$